第 4 章　控制系统的可控性和可观性

温　杰

wen.jie@outlook.com

中北大学, 电气与控制工程学院

2023 年 春季学期

在经典控制理论中，着眼点在于研究对系统输出的控制．对于一个单输入一单输出系统来说，系统的输出量既是被控量，又是观测量．因此，输出量明显地受输人信号控制，同时，也能观测，即系统不存在能控、不能控和能观测、不能观测的问题．

现代控制理论着眼点在于研究系统状态的控制和观测．这时就遇到系统的能控性和能观测性问题了．可控性[1]、可观性[2]与稳定性是现代控制系统的三大基本特性．

[1]能控性
[2]能观性

提纲

- 可控性和可观测性
  - 系统的可控性概念
  - 系统状态的可控性判据
  - 系统的输出可控性判据
  - 系统的可观性概念
  - 系统的可观性判据
- 可控性和可观性的对偶关系
- 系统结构规范分解
  - 按能控性分解
  - 按能观性分解
  - 按能控性和能观测性分解
- 传递函数阵的实现
  - 实现
  - 最小实现
  - 求最小实现

系统的可控性概念

如果系统所有状态变量的运动都可以通过有限点的控制输入来使其由任意的初态达到任意设定的终态，则称系统是**可控**的，更确切的说是**状态可控**的；否则，就称系统是不完全可控的，简称为系统不可控.

说明：

1. 系统在时刻 t 的运动状态是由 n 个状态变量综合描述的. 系统可控就意味着这 n 个状态变量都必须与系统的控制输入存在确定的联系，如果有一个或部分状态变量不接受输入控制，就称系统是不可控的，或称系统是部分可控. 这样系统状态空间就分为可控状态空间和不可控状态空间. 因此，系统的可控性是刻画系统的结构性质，与系统的具体输入 u 无关.
2. 可控性分为状态可控性和输出可控性，若不特别指明，一般指状态可控性. 状态可控性只与状态方程有关，与输出方程无关.
3. 等价定义于若给定系统的一个初始状态可为 $x(t_0)$，t_0 可以为 0，如果在的有限时间区间 $[t_0, t_1]$ 内，存在控制 $u(t)$ 使 $x(t_1) = 0$，则称系统状态在 t_0 时刻是能控的；如果系统对任意一个初始状态都能控，则称系统是状态完全能控的.
4. 如果在时间区间 $[t_0, t_1]$ 内存在控制 $u(t)$，使系统从状态空间坐标原点 $x(t_0) = 0$ 推向预先指定的状态 $x(t_1)$，则称为状态能达性. 可以证明系统能控性与能达性是等价的.

系统状态的可控性判据

判据一

若线性定常系统状态方程 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu$ 能控, 则能控性矩阵 $U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ 满秩，即 $\mathrm{rank}(U) = n$. 反之也成立.

- 时变系统可以用格拉姆矩阵判断，充要条件. 复杂.
- 能控性矩阵的秩称为系统的**能控性指数**, 表示系统的能控状态变量的个数.
- 其它充要判据等价从略.
- 判据一的证明从略, 结合具体例子介绍其方法.

系统状态的可控性判据

例 1 考虑下式所确定系统的可控性.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

解: 由于

$$\det U = \det[B \vdots AB] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

即 U 为奇异, 所以该系统是状态不能控的.

例 2 考虑下式所确定系统的可控性.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解: 由于

$$\det U = \det[B \vdots AB] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

即 U 为非奇异, 所以该系统是状态能控的.

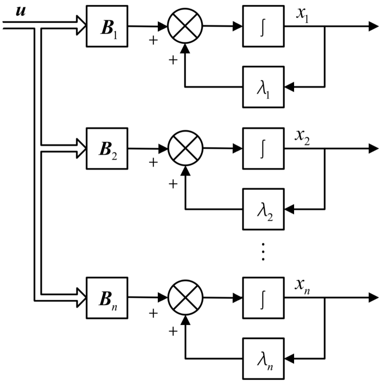
系统状态的可控性判据

判据二

如果 A 的特征向量互不相同, 则经过线性变换将 A 阵转换为对角阵后, 系统可控的充要条件是转换后的状态方程:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \hat{x} + \hat{B}u$$

其输入矩阵 $\hat{B}$ 没有一行的所有元素均为零 (每一个方程都有 u 参与).



可见，系统各状态变量之间没有耦合关系，系统相当于 n 个独立的子系统并联.

输入 $u(t)$ 对状态变量是否有控制作用取决于输入矩阵 B 中第 i 行的元素是否不全为 0，即是否 $B_i \neq 0$.

系统状态的可控性判据

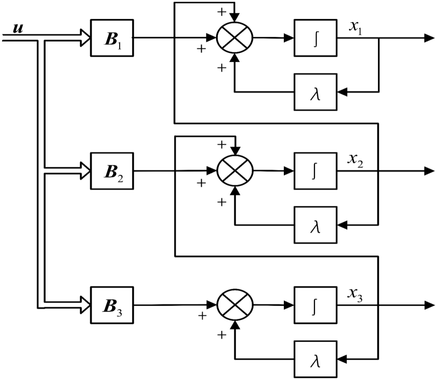
如果矩阵 A 不具有互异的特征向量，则不能将其化为对角线形式．在这种情况下，可将 A 化为 Jordan 标准形．

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix} \hat{x} + \hat{B} u$$

其中，$\hat{B}$ 矩阵的与每个约当块最后一行相对应的那些行中每行的元素不全为零．

系统状态的可控性判据

若输入矩阵中 $B_3 \neq 0$, 则输入 $u(t)$ 对状态变量 x_3 有直接的控制作用. 此时，即使中其他行的元素全为 0，即 $B_1 = 0$ 和 $B_2 = 0$，输入 $u(t)$ 对状态变量 x_1 和 x_2 也可以通过状态变量 x_3 产生间接的控制作用. 因此，只要 $B_3 \neq 0$，输入 $u(t)$ 对各状态变量都有控制作用.



系统状态的可控性判据

例 3 下列系统是状态能控的:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{2} \\ \underline{5} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{4} \\ \underline{3} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \underline{3} & \underline{0} \\ 0 & 0 \\ \underline{2} & \underline{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

系统状态的可控性判据

例 4 下列系统是不能控的:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \underline{0} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ \underline{0} & \underline{0} \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ \underline{0} \end{bmatrix} u$$

系统的输出可控性判据

设系统的状态空间表达式为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx
\end{aligned}
$$

其中，输出矩阵 $C: q \times n$, q 个输出.

如果在一个有限的区间 $[t_0, t_1]$ 内, 存在适当的控制向量 $u(t)$, 使系统能从任意的初始输出 $y(t_0)$ 转移到任意指定最终输出 $y(t_1)$, 则称系统是**输出完全能控**[3]的.

定理

系统输出完全能控的充分必要条件是矩阵

$$
\begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \cdots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}
$$

的秩为 q.

[3]弱于状态可控.

系统的输出可控性判据

例 5 判断系统状态可控性和输出可控性:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

秩为 1, 所以系统是状态不能控的.

$$\begin{bmatrix} CB & CAB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

秩为 1, 等于输出变量的个数, 因此系统是输出能控的.

注意：部分状态不可控，但输出可能不涉及那些状态，所以输出仍然可能可控.

系统的可观性概念

如果系统所有的状态变量任意形式的运动均可由有限时间的输出测量完全确定出来，则称系统是可观测的，简称为系统可观测；反之，则称系统是不完全可观测的，简称为系统不可观测.

在下面讨论能观测性条件时，我们将只考虑零输入系统．这是因为，状态能否被观测，与有没有输入无关．事实上，非零状态的能量释放（紧张度释放），也同样可以激励所有状态．为简化分析，通常只考虑零输入情形.

系统的可观性判据

考虑下式所描述的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

其输出向量为

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

由于 $e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)A^k$, 将 $y(t)$ 写为 A 的有限项形式, 即

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)CA^k x(0)$$

或

$$y(t) = a_0(t)Cx(0) + a_1(t)CAx(0) + \cdots + a_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_0(t)I & \alpha_1(t)I & \cdots & \alpha_{n-1}(t)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

系统的可观性判据

显然，如果系统是能观测的，那么在 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 时间间隔内, 给定输出 $y(t)$, 就可由上式唯一地确定出 $x(0)$.

这就要求 $nq \times n$ 维能观测性矩阵的秩为 n, 此为判据一.

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

系统的可观性判据

例 6 试判断由式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

所描述的系统是否为能控和能观测的.

解: 由于能控性矩阵

$$U = [B \vdots AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{rank } U = 2 = n$$

故该系统是状态能控的.
对于输出能控性, 可由系统输出能控性矩阵的秩确定. 由于

$$U' = [CB \vdots CAB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank } U = 1 = q$$

故该系统是输出能控的. 事实上, 状态可控一定输出可控.

系统的可观性判据

例 6 试判断由式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

所描述的系统是否为能控和能观测的.

解: 对于能观测性矩阵的秩:

$$V^T = \left[C^T \vdots A^T C^T \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \operatorname{rank} V^T = 2 = n$$

故此系统是能观测的.

系统的可观性判据

判据二

若线性定常系统的状态矩阵有互不相同的特征值，则系统状态能观测的充要条件是，经线性等价变换把矩阵化成对角标准形后，系统的状态空间表达式

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} x$$

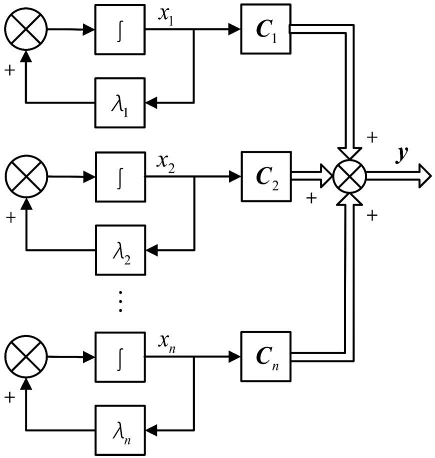
$$y = \hat{C}\hat{x}$$

矩阵 $\hat{C}$ 不包含元素全为零的列.

系统的可观性判据

对角标准型结构为：

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 & \mathrm{C}_2 & \cdots & \mathrm{C}_n \end{bmatrix} \mathrm{x} \end{cases}$$



系统的可观性判据

类比可控性:

设线性定常系统的状态矩阵有不同的重特征值, 且对应于每一重特征值只有一个约当块. 则系统状态完全能观测的充要条件是, 经线性等价变换将矩阵化成约当标准形后, 系统的状态空间表达式

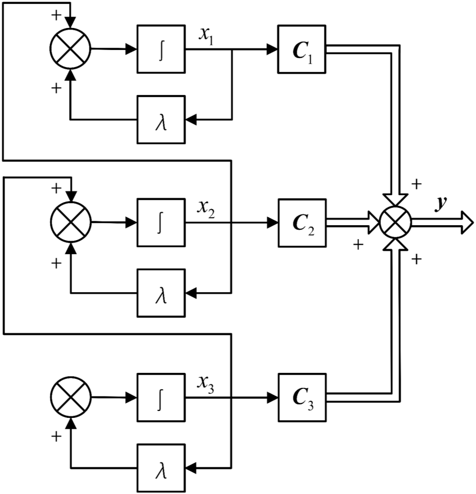
$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix} \hat{x} \\
y &= \hat{C}\hat{x}
\end{aligned}
$$

中, 与每个约当块第一列相对应的 $\hat{C}$ 矩阵的所有各列, 其元素不全为零.

系统的可观性判据

约旦块结构如右图：

可见，若输出矩阵 C 的第一列的元素不全为 0，即 $C_1 \neq 0$，则即使第二列和第三列的元素全为 0，即 $C_2 = 0$ 和 $C_3 = 0$，输出 $y(t)$ 也包含所有的状态变量，系统是能观测的.



系统的可观性判据

例 7 下列系统是能观测的:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \underline{1} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{3} & 0 & 0 \\ \underline{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ & & & -3 & 1 \\ 0 & & 0 & & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & \underline{0} & 0 \\ \underline{0} & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

系统的可观性判据

例 8 显然，下列系统是不能观测的：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \underline{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & 1 & 3 \\ \underline{0} & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \\ \dot{x}3 \\ \dot{x}4 \\ \dot{x}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ & & & -3 & 1 \\ 0 & & 0 & & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & \underline{0} & 0 \\ \underline{0} & 1 & 1 & \underline{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

可控性和可观性的对偶关系

系统能控性是研究输入 $u(t)$ 与状态 $x(t)$ 之间的关系，而能观测性是研究输出 $y(t)$ 与状态 $x(t)$ 之间的关系．通过上面的讨论可以看到，能控性与能观测性，无论在概念上还是判据的形式上，都很相似．它给人们一个启示，即能控性与能观测性之间存在某种内在的联系．这个联系就是卡尔曼提出的对偶性．

考虑由下述状态空间表达式描述的系统 S1(r 个输入 m 个输出):

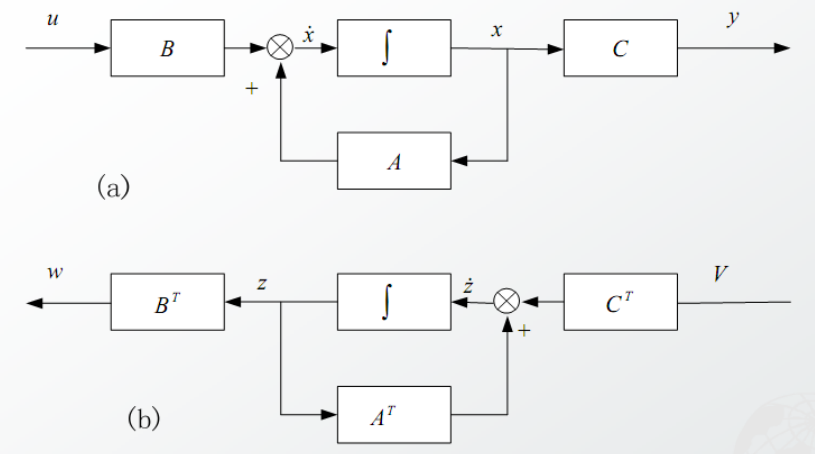
$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx \\
x &\in R^n, u \in R^r, y \in R^m, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}, C \in R^{m\times n}
\end{aligned}$$

现在, 我们来构造一个系统 S2(m 个输入 r 个输出):

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= A^T z + C^T v \\
w &= B^T z \\
z &\in R^n, v \in R^m w \in R^r, A^T \in R^{n\times n}, C^T \in R^{n\times m}, B^T \in R^{r\times n}
\end{aligned}$$

S2 称为 S1 的**对偶系统**, 互为对偶.

可控性和可观性的对偶关系



可控性和可观性的对偶关系

关于对偶系统：

- 对偶的两个系统传递函数阵互为转置.
- 对偶的两个系统特征值相同.
- 系统 S1 的能控性等价于系统 S2 的能观测性；而系统 S1 的能观测性与系统 S2 的能控性等价. 这就是对偶原理[4].
- 单输入/单输出的能控标准型等价于其对偶系统的能观标准型

两个系统的传递函数矩阵的关系

$$G_1(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$G_2(s) = B^{\mathrm{T}}\left(sI - A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}C^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}\left(sI - A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$$

$$[G_2(s)]^{\mathrm{T}} = C(sI - A)^{-1}B = G_1(s)$$

在动态方程建模、系统可控性和可观测性的判别、系统线性变换等问题上, 应用对偶原理, 往往可以使问题得到简化.

[4] 利用对偶原理，一个给定系统的可观性可用其对偶系统的状态可控性来检检和判断.

系统结构规范分解

状态空间按照可控可观性可以分解为四个子空间, 这个分解过程称为系统的**规范分解**.

通过规范分解能明晰系统的内部结构特性和传递特性，简化系统的分析与设计.

按能控性分解

设 n 维线性定常系统 $\sum(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$ 是状态不完全能控的，能控性矩阵 U 的秩为 n_1，即 $\operatorname{rank}\mathrm{U}=n_1<n$，则必存在非奇异线性变换 $\mathrm{x}=\mathrm{T_c}\bar{\mathrm{x}}$，能将系统变换为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{c} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{c} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{c} \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{c} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \bar{C}_{c} & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{c} \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

其中，

n_1 维子系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_{c} = \bar{A}_{c}\bar{x}_{c} + \bar{A}_{12}\bar{x}_{\bar{c}} + \bar{B}_{c}u \\ y_{c} = \bar{C}_{c}\bar{x}_{c} \end{cases}$$

是能控的.

$n-n_1$ 维子系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} = \bar{A}_{\bar{c}}\bar{x}_{\bar{c}} \\ y_{\bar{c}} = \bar{C}_{\bar{c}}\bar{x}_{\bar{c}} \end{cases}$$

是不能控的.

按能控性分解

说明:

- 能控的状态对不能控的状态无贡献;
- 不能控的状态对能控的状态有贡献;
- 不能控的状态方程不体现 u 的作用.

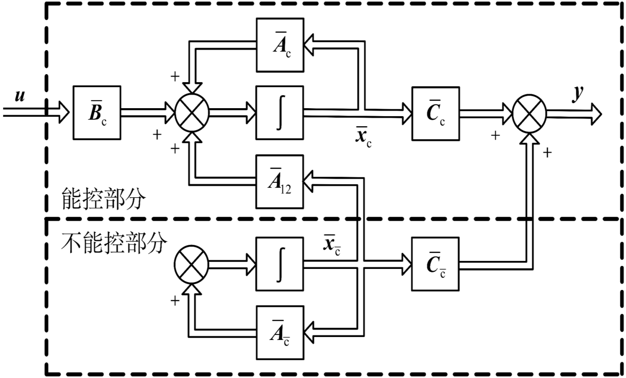
非奇异线性变换矩阵 $\mathrm{T_c}$ 为:

$$\mathrm{T_c} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_1 & \mathrm{T}_2 & \cdots & \mathrm{T}_{n_1} & \mathrm{T}_{n_1+1} & \cdots & \mathrm{T}_n \end{bmatrix}$$

式中, 列向量 $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_{\mathrm{n}1}$ 是能控性矩阵 U 中任意 n_1 个线性无关的列, 另外 $n - n_1$ 个列向量 $\mathrm{T}_{n1+1}, \ldots, \mathrm{T}_n$ 是确保矩阵 $\mathrm{T_c}$ 非奇异的任意 n 维列向量.

按能控性分解

系统按能控性分解后的结构图如下图所示. 从图中可以直观地看出, 输入 $u(t)$ 只对状态分量 $\bar{x}_c$ 有控制作用, 对状态分量 $\bar{x}_{\bar{c}}$ 没有控制作用.



$\bar{A}_{12}$ 过来的不可控状态影响可以通过 u 控制消除的.

按能观性分解

设 n 维线性定常系统 $\sum(A, B, C)$ 是状态不完全能观测的，能观测性矩阵 V 的秩为 n_1，即 $\mathrm{rank}\,\mathrm{V} = n_1 < n$，则必存在非奇异线性变换 $x = T_0\bar{x}$，能将系统变换为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathrm{x}}}_{\mathrm{o}} \\ \dot{\bar{\mathrm{x}}}_{\bar{\mathrm{o}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{o}} & 0 \\ \bar{\mathrm{A}}_{21} & \bar{\mathrm{A}}_{\bar{\mathrm{o}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{o}} \\ \bar{\mathrm{x}}_{\bar{\mathrm{o}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{B}}_{\mathrm{o}} \\ \bar{\mathrm{B}}_{\bar{\mathrm{o}}} \end{bmatrix} u \\ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{C}}_{\mathrm{o}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{o}} \\ \bar{\mathrm{x}}_{\bar{\mathrm{o}}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

其中，

n_1 维子系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathrm{x}}}_{\mathrm{o}} = \bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{o}}\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{o}} + \bar{\mathrm{B}}_{\mathrm{o}}\mathrm{u} \\ \mathrm{y}_{\mathrm{o}} = \bar{\mathrm{C}}_{\mathrm{o}}\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{o}} \end{cases}$$

是能观的.

$n - n_1$ 维子系统

$$\dot{\bar{\mathrm{x}}}_{\bar{\mathrm{o}}} = \bar{\mathrm{A}}_{21}\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{o}} + \bar{\mathrm{A}}_{\bar{\mathrm{o}}}\bar{\mathrm{x}}_{\bar{\mathrm{o}}} + \bar{\mathrm{B}}_{\bar{\mathrm{o}}}u$$

是不能观的.

不能观的状态对 y 没贡献.

按能观性分解

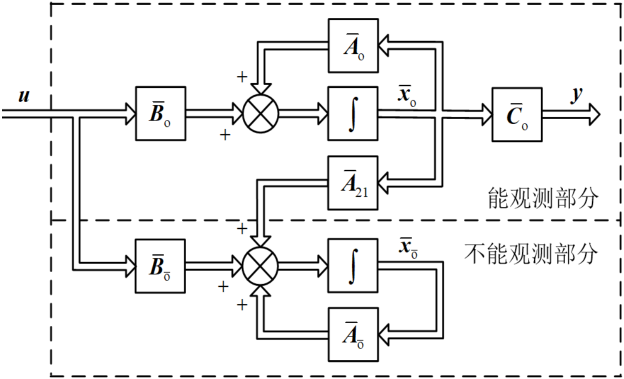
非奇异线性变换矩阵 T_0 为:

$$\mathrm{T_o} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{T}_{n_1} \\ \mathrm{T}_{n_1+1} \\ \vdots \\ \mathrm{T}_n \end{bmatrix}^{-1}$$

式中, 行向量 $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_{\mathrm{n}1}$ 是能观测性矩阵 V 的任意 n_1 个线性无关的行, 另外 $n - n_1$ 个行向量 $\mathrm{T}_{n1+1}, \ldots \mathrm{T}_n$ 是确保矩阵 $\mathrm{T_o}^{-1}$ 非奇异的任意 n 维行向量.

按能观性分解

系统按能观测性分解后的结构图如下图所示. 从图中可以直观地看出, 系统的输出信号 $y(t)$ 中只包含状态分量 $\bar{x}_o$, 不包含状态分量 $\bar{x}_{\bar{o}}$.



按能控性和能观测性分解

设线性定常系统 $\sum(A, B, C)$ 状态既不完全能控也不完全能观测, 则必存在非奇异线性变换, 能将系统变换为:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathrm{x}}}_{\mathrm{co}} \\ \dot{\bar{\mathrm{x}}}_{\mathrm{co}} \\ \dot{\bar{\mathrm{x}}}_{\bar{\mathrm{c}}} \\ \dot{\bar{\mathrm{x}}}_{\overline{\mathrm{co}}} \end{bmatrix}
&=
\begin{bmatrix} \bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{co}} & 0 & \bar{\mathrm{A}}_{13} & 0 \\ \bar{\mathrm{A}}_{21} & \bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{co}} & \bar{\mathrm{A}}_{23} & \bar{\mathrm{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{\mathrm{A}}_{\overline{\mathrm{co}}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathrm{A}}_{43} & \bar{\mathrm{A}}_{\overline{\mathrm{co}}} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{co}} \\ \bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{co}} \\ \bar{\mathrm{x}}_{\bar{\mathrm{c}}} \\ \bar{\mathrm{x}}_{\overline{\mathrm{co}}} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \bar{\mathrm{B}}_{\mathrm{co}} \\ \bar{\mathrm{B}}_{\mathrm{co}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{u} \\
\mathrm{y} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{C}}_{\mathrm{co}} & 0 & \bar{\mathrm{C}}_{\overline{\mathrm{co}}} & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{co}} \\ \bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{co}} \\ \bar{\mathrm{x}}_{\bar{\mathrm{c}}} \\ \bar{\mathrm{x}}_{\overline{\mathrm{co}}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

提示： 也可先按可观分解，那样 B、C 矩阵略微调整即可.

按能控性和能观测性分解

系统被分解为四个子系统，即

能控且能观测的子系统:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathrm{x}}}_{\mathrm{co}} = \bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{co}}\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{co}} + \bar{\mathrm{A}}_{13}\bar{\mathrm{x}}_{\overline{\mathrm{co}}} + \bar{\mathrm{B}}_{\mathrm{co}}\mathrm{u} \\ \mathrm{y}_{\mathrm{co}} = \bar{\mathrm{C}}_{\mathrm{co}}\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{co}} \end{cases}$$

能控不能观测的子系统:

$$\dot{\bar{x}}_{\mathrm{co}} = \bar{A}_{21}\bar{x}_{\mathrm{co}} + \bar{A}_{\mathrm{co}}\bar{x}_{\mathrm{co}} + \bar{A}_{23}\bar{x}_{\mathrm{co}} + \bar{A}_{24}\bar{x}_{\overline{co}} + \bar{\mathrm{B}}_{\mathrm{co}}\mathrm{u}$$

不能控能观测的子系统:

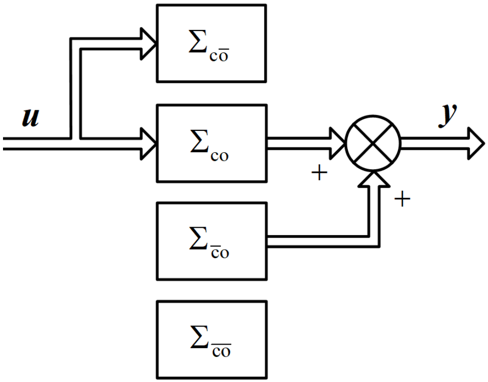
$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_{\overline{\mathrm{co}}} = \bar{A}_{\overline{\mathrm{co}}}\bar{\mathrm{x}}_{\overline{\mathrm{co}}} \\ \mathrm{y}_{\overline{\mathrm{co}}} = \bar{\mathrm{C}}_{\overline{\mathrm{co}}}\bar{\mathrm{x}}_{\overline{\mathrm{co}}} \end{cases}$$

不能控且不能观测的子系统:

$$\dot{\bar{\mathrm{x}}}_{\overline{\mathrm{co}}} = \bar{\mathrm{A}}_{43}\bar{\mathrm{x}}_{\overline{\mathrm{co}}} + \bar{A}_{\overline{\mathrm{co}}}\bar{\mathrm{x}}_{\overline{\mathrm{co}}}$$

按能控性和能观测性分解

系统按能控性和能观测性分解后的结构图如下图所示. 从图中可以直观地看出, 在系统的输入 $u(t)$ 与输出 $y(t)$ 之间只有一条信息传递通道, 这条通道只经过能控且能观测的子系统, 与系统中不能控的或不能观测的子系统无关.



按能控性和能观测性分解

根据传递函数阵具有不变性, 可求得系统 $\sum(A, B, C)$ 的传递函数阵为:

$$G(s) = \overline{G}(s) = \overline{C}(sI - \overline{A})^{-1}\overline{B}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{C}_{co} & 0 & \overline{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - \overline{A}_{co} & 0 & -\overline{A}_{13} & 0 \\ -\overline{A}_{21} & sI - \overline{A}_{c\bar{o}} & -\overline{A}_{23} & -\overline{A}_{24} \\ 0 & 0 & sI - \overline{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{A}_{43} & sI - \overline{A}_{\overline{co}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{B}_{co} \\ \overline{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{C}_{co} & 0 & \overline{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(sI - \overline{A}_{co}\right)^{-1} & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{B}_{co} \\ \overline{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \overline{C}_{co}\left(sI - \overline{A}_{co}\right)^{-1}\overline{B}_{co}$$

可见, 系统 $\sum(A, B, C)$ 的传递函数阵等于能控且能观测子系统的传递函数阵.

$$G(s) = \overline{G}(s) = \overline{C}(sI - \overline{A})^{-1}\overline{B} = \overline{C}_{co}\left(sI - \overline{A}_{co}\right)^{-1}\overline{B}_{co}$$

这一结论表明，描述系统输入输出特性的传递函数阵只能反映系统中既能控也能观测的部分，是系统的一种不完全描述.

在系统中添加或删除不能控的或不能观测的子系统或状态变量都不会影响系统的传递函数阵. 因此，一个传递函数阵可以对应无穷多个状态空间表达式，可以描述无穷多个内部结构不同的系统.

按能控性和能观测性分解

例 9 已知线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

试将系统按能控性和能观测性进行分解.

解: (1) 系统的能控性矩阵为

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

能观测性矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

由于 $\operatorname{rank} U = 2 < n, \operatorname{rank} V = 2 < n$，所以系统是既不完全能控也不完全能观测的.

按能控性和能观测性分解

（2）将系统按能控性分解．构造变换矩阵 T_c 为

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

系统按能控性分解为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

其中，能控子系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \bar{x}_c + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \bar{x}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \bar{x}_c \end{cases}$$

按能控性和能观测性分解

其能观性矩阵的秩为

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 < 2$$

因此, 能控子系统是不能观的.

不能控子系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} = -\bar{x}_{\bar{c}} \\ y_{\bar{c}} = -2\bar{x}_{\bar{c}} \end{cases}$$

该子系统是能观的, 不需要按能观性分解.

按能控性和能观测性分解

(3) 将能控子系统按能观测性分解．构造变换矩阵 T_{o1} 为

$$T_{o1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

能控子系统分解为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{co} \\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \bar{x}_{\overline{co}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

(4) 综合上述分解结果, 系统按能控性和能观性分解为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\overline{co}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{c}} \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

按能控性和能观测性分解

例 10 已知线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

试将系统按能控性和能观测性进行分解.

按能控性和能观测性分解

解: 根据约当标准型能控性和能观测性判据可以判断各状态变量的能控性和能观测性，其中

x_1 能控也能观测; x_4 能控不能观测;

x_2 不能控能观测; x_3 不能控也不能观测.

将状态变量按照 $x_{co}, x_{c\bar{o}}, x_{\bar{c}o}, x_{\overline{co}}$ 的顺序重新排列并整理系数矩阵, 可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

按能控性和能观测性分解

系统的结构分解的意义：

- 有助于更深入地了解系统的结构特性；
- 有助于更深刻地揭示系统的状态空间表达式与输入输出描述之间的本质差别，为最小实现问题提供理论依据;
- 系统的结构分解也是系统综合时的一种有用方法.

实现

由传递函数阵 (或传递函数) 建立系统的状态空间表达式的问题, 称为**实现问题**.

1. 定义
对于一个给定的传递函数阵 $G(s)$, 若某个状态空间表达式 $\Sigma(A, B, C, D)$ 满足

$$C(sI - A)^{-1}B + D = G(s)$$

则称这个 $\Sigma(A, B, C, D)$ 是传递函数阵 $G(s)$ 的一个**实现**.

2. 传递函数阵的物理可实现性条件
传递函数阵 $G(\mathrm{s})$

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1r}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \cdots & g_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

的所有元

$$g_{ij}(s)(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, r)$$

都是 s 的真有理分式; 且分子、分母多项式的系数都是实数.

实现

3. 实现的性质

1. 传递函数阵的实现的维数不唯一.

   根据系统结构分解理论，传递函数阵只描述系统中能控且能观测的部分. 在传递函数阵 $G(s)$ 的一个实现中添加或删除不能控或不能观测的状态变量，所得到的状态空间表达式仍是传递函数阵 $G(s)$ 的实现.

2. 传递函数阵的维数相同的实现不唯一.

   根据传递函数阵具有不变性，对传递函数阵 $G(s)$ 的一个实现进行非奇异线性变换，所得到的状态空间表达式仍是传递函数阵 $G(s)$ 的实现.

实现

例 11 下列状态空间表达式都是传递函数

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

的实现.

$$(1)\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$$

最小实现

- **定义**

  传递函数阵的实现的维数不唯一，其中维数最低的实现称为**最小实现**.

- **性质**

  传递函数阵的最小实现不唯一，但维数唯一，不同的最小实现代数等价（线性变化）.

- **判定方法**

  传递函数阵 $G(s)$ 的一个实现 $\sum(A, B, C)$ 是最小实现的充要条件是，$\sum(A, B, C)$ 是既能控也能观测的.

求最小实现

求最小实现的方法:

1. 先求出传递函数阵 $\mathrm{G}(s)$ 的一个实现 $\sum(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$, 通常是先写出能控标准型实现或能观测标准型实现, 然后判断是否最小实现. 若不是, 则进行下一步.
2. 对实现 $\Sigma(A, B, C)$ 进行结构分解, 所得到的能控且能观测的子系统就是 $\mathrm{G}(s)$ 的一个最小实现.

求最小实现

设单输入-单输出线性定常系统的传递函数为:

$$G(s)=\frac{b_1 s^{n-1}+b_2 s^{n-2}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

则其能控标准型实现为：

$$\begin{cases}\dot{\mathrm{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}\mathrm{x}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1\end{bmatrix}\mathrm{x}\end{cases}$$

能观测标准型实现为:

$$\begin{cases}\dot{\mathrm{x}}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & -a_n\\ 1 & \cdots & 0 & -a_{n-1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -a_1\end{bmatrix}\mathrm{x}+\begin{bmatrix}b_n\\ b_{n-1}\\ \vdots\\ b_1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\mathrm{x}\end{cases}$$

求最小实现

设多输入-多输出线性定常系统的传递函数阵为 $m \times r$ 维矩阵, 即

$$\mathrm{G}(s) = \frac{\mathrm{B}_1 s^{n-1} + \mathrm{B}_2 s^{n-2} + \cdots + \mathrm{B}_{n-1} s + \mathrm{B}_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

式中, 分母多项式是传递函数阵的特征多项式; 分子多项式的系数矩阵为 $\mathrm{B}_i(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. 则其能控标准型实现为:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 0_r & \mathrm{I}_r & \cdots & 0_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_r & 0_r & \cdots & \mathrm{I}_r \\ -a_n \mathrm{I}_r & -a_{n-1}\mathrm{I}_r & \cdots & -a_1 \mathrm{I}_r \end{bmatrix} \mathrm{x} + \begin{bmatrix} 0_r \\ \vdots \\ 0_r \\ \mathrm{I}_r \end{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_n & \mathrm{B}_{n-1} & \cdots & \mathrm{B}_1 \end{bmatrix} \mathrm{x} \end{cases}$$

能观测标准型实现为:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 0_m & \cdots & 0_m & -a_n \mathrm{I}_m \\ \mathrm{I}_m & \cdots & 0_m & -a_{n-1}\mathrm{I}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_m & \cdots & \mathrm{I}_m & -a_1 \mathrm{I}_m \end{bmatrix} \mathrm{x} + \begin{bmatrix} \mathrm{B}_n \\ \mathrm{B}_{n-1} \\ \vdots \\ \mathrm{B}_1 \end{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} 0_m & \cdots & 0_m & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} \mathrm{x} \end{cases}$$

求最小实现

例 12 求下列给定传递函数的能控标准形实现、能观测标准型实现和约当标准型实现.

$$G(s)=\frac{s^2+s+2}{s^3+3s^2+2s}$$

（1）能控标准型实现为 $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}2&1&1\end{bmatrix}x\end{cases}$

（2）能观测标准型实现为 $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&-2\\0&1&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}x\end{cases}$

(3) 将给定传递函数按部分分式展开, 可得

$$G(s)=\frac{1}{s}+\frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2}$$

对角标准型实现为

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&-2&2\end{bmatrix}x\end{cases}$$

可以判断上述三个实现都是给定传递函数 $G(s)$ 的最小实现.

求最小实现

例 13 求下列给定传递函数阵的实现.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ -\frac{1}{s^2-s} & -\frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

解: 将 $G(s)$ 写成分式的形式, 即

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^3 - s^2} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -s & -s^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^3 - s^2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} & n = 3 \\ & a_1 = -1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0 \\ & B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

求最小实现

可得能控标准型实现的各系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 \\ -a_3 I_2 & -a_2 I_2 & -a_1 I_2 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$B=\begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} B_3 & B_2 & B_1 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

作业

- 3-1
- 3-3
- 3-5
- 3-15
- 3-17
- 3-19