第 7 章　最优控制基础

温　杰

wen.jie@outlook.com

中北大学, 电气与控制工程学院

2023 年 春季学期

提纲

最优控制的发展简史

- 先期工作
  - 1948 年，维纳 (N.Wiener) 发表《控制论》，引进了信息、反馈和控制等重要概念，奠定了控制论 (Cybernetics) 的基础．并提出了相对于某一性能指标进行最优设计的概念．
  - 1950 年, 米顿纳尔 (Medona1) 首先将这个概念用于研究继电器系统在单位阶跃作用下的过渡过程的时间最短最优控制问题．
  - 1954 年，钱学森编著《工程控制论》（上下册），作者系统地揭示了控制论对自动化、航空、航天、电子通信等科学技术的意义和重大影响．其中“最优开关曲线”等素材，直接促进了最优控制理论的形成和发展．

最优控制的发展简史

- 理论形成阶段
    - 自动控制联合会 (IFAC) 第一届世界大会于 1960 年召开, 卡尔曼（Kalman）、贝尔曼（R.Bellman）和庞特里亚金（Pontryagin）分别在会上作了“控制系统的一般理论”、“动态规划”和“最优控制理论”的报告, 宣告了最优控制理论的诞生，人们也称这三个工作是现代控制理论的三个里程碑.
    - 1953 — 1957 年，贝尔曼 (R.E.Bellman) 创立“动态规划”原理. 为了解决多阶段决策过程逐步创立的，依据最优化原理，用一组基本的递推关系式使过程连续地最优转移. “动态规划”对于研究最优控制理论的重要性，表现于可得出离散时间系统的理论结果和迭代算法.
    - 1956 — 1958 年，庞特里亚金创立“极小值原理”. 它是最优控制理论的主要组成部分和该理论发展史上的一个里程碑. 对于“最大值原理”，由于放宽了有关条件的使得许多古典变分法和动态规划方法无法解决的工程技术问题得到解决，所以它是解决最优控制问题的一种最普遍的有效的方法. 同时，庞特里亚金在《最优过程的数学理论》著作中已经把最优控制理论初步形成了一个完整的体系.
    - 此外，构成最优控制理论及现代最优化技术理论基础的代表性工作，还有不等式约束条件下的非线性最优必要条件 (库恩—图克定理) 以及卡尔曼的关于随机控制系统最优滤波器等.

最优控制问题的描述

已知被控系统的状态方程以及给定的初始状态

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u, t) \quad t \in [t_0, t_f] \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

规定的目标集为 S (例如 $S = \{x \mid \psi(x, t_f) = 0, \psi \in R^p, p \leq n\}$, 求一容许控制 $u \in U_r$, 使系统在该控制的作用下由初态出发, 在某个大于 t_0 的终端时刻 t_f 达到目标集 S 上，并使性能指标

$$J[u(\cdot)] = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt$$

达到最小.

最优控制问题的描述

从以上最优控制问题的描述中可见:

1. 有一个被控对象 (系统数学模型)
它通常由常微分方程组描述的动态模型来表征, 即

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad t \in [t_o, t_f]$$

其初态一般是给定的，即 $x(t_0) = x_0$.

2. 有一目标集及边界条件
目标集：在控制 u 的作用下，把被控对象的初态 x_0 在某个终端时刻转移到某个终端状态 $x(t_f)$. $x(t_f)$ 通常受几何约束. 例如考虑它是一个点集, 在约束条件 $\psi(x, t_f) = 0$ 下目标集为

$$S = \{x \mid \psi(x, t_f) = 0, \psi \in R^p, p \leq n\}$$

边界条件:

- 初始状态：初始时刻 t_0 和 $x(t_0)$ ，通常是已知的.
- 末端状态：末端时刻 t_f 和 $x(t_f)$, 通常是未知的.

最优控制问题的描述

3. 容许控制集

控制向量 u 的各个分量 u_i 往往是具有不同物理属性的控制量. 在实际控制问题中, 大多数控制量受客观条件的限制只能取值于一定的范围, 将控制约束条件的点集称为控制域 Ω, 则将在闭区间 $[t_0, t_f]$ 上有定义, 且在控制域内取值的每个控制函数 $u(t)$ 称为容许控制, 记做 $u \in \Omega$

4. 性能指标

为了能在各种控制律中寻找到效果最好的控制, 需要建立一种评价控制效果好坏或控制品质优劣的性能指标函数. 又称代价 (成本, 目标) 函数或泛函, 记做 $J[u(\cdot)]$, 它是一个依赖于控制的有限实数, 一般的表达式为:

$$J[u(\cdot)] = \varphi\left(x\left(t_f\right), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt$$

该表达式包括了依赖于终端时刻 t_f 和终端状态 $x\left(t_f\right)$ 的末值型项, 以及依赖于这个控制过程的积分型项. 因此, 可将最优控制问题的性能指标分为: 混合型、末值型和积分型. 不同的控制问题, 应取不同的性能指标.

最优控制问题的描述

1. 积分型性能指标: $J[u(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_t} L(x(t), u(t), t)\,dt$
   - 最短时间控制: $L(x(t), u(t), t) = 1 \quad J[u(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$
   - 最少燃烧控制:
     $L(x(t), u(t), t) = \sum_{j=1}^{m} |u_j(t)| \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{m} |u_j(t)|\,dt$
   - 最小能量控制:
     $L(x(t), u(t), t)) = u^T(t)u(t) \quad J = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t)u(t)dt$
2. 末值型性能指标: $J[u(\cdot)] = \varphi(x(t_f), t_f)$
3. 混合型性能指标: $J[u(\cdot)] = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\,dt$

对最优控制问题的进一步说明: 如果最优控制问题有解，即: 使 $J[u(\cdot)]$ 达到极小值的控制函数存在, 记为 $u^*(t) \quad t \in [t_0, t_f]$ ，称为最优控制; 相应的状态轨迹 $x^*(t)$ 称为最优轨迹; 性能指标 $J^* = J[u^*(\cdot)]$ 称为最优性能指标.

最优控制问题的描述

举例 月球上的软着陆问题（最小燃耗问题）

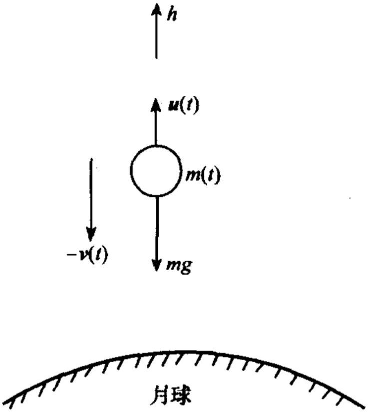

图 1. 登月舱软着陆示意图

最优控制问题的描述

举例 月球上的软着陆问题（最小燃耗问题）

飞船靠其发动机产生一与月球重力方向相反的推力 $u(t)$, 以使飞船在月球表面实现软着陆, 要寻求发动机推力的最优控制规律, 以便使燃料的消耗为最少.
设飞船质量为 $m(t)$, 高度为 $h(t)$, 垂直速度为 $v(t)$, 发动机推力为 $u(t)$, 月球表面的重力加速度为常数 g. 设不带燃料的飞船质量为 M, 初始燃料的总质量为 F. 初始高度为 h_0, 初始的垂直速度为 v_0, 那么飞船的运动方程可以表示为:

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -g + \frac{u(t)}{m(t)} \\ \dot{m}(t) = -ku(t) \end{cases} \quad \text{初始条件} \quad \begin{cases} h(0) = h_0 \\ v(0) = v_0 \\ m(0) = M + F \end{cases}$$

终端条件 $\begin{matrix} h(t_f) = 0 \\ v(t_f) = 0 \end{matrix}$, 约束条件 $0 \le u(t) \le a$

性能指标是使燃料消耗为最小，即 $J = m(t_f)$ 达到最大值.

泛函

变分法是求解泛函极值的一种经典方法，因此也是研究最优控制问题的一种重要工具.

泛函：给定函数空间 U，若对于任何函数 $x(\mathrm{t}) \in U$，总有一个确定的值 $J(x(t))$ 与之对应, 则称 $J(x(t))$ 是函数 $x(t)$ 的泛函. 这里 $x(\mathrm{t})$ 常被称做宗量.

从定义中可以发现, 泛函是变量与函数之间的关系, 常称之为"函数的函数".

函数与泛函比较：

- 函数
  - 对于变量 t 的某一变域中的每一个值，x 都有一个值与之相对应，那么变量 x 称作变量 t 的函数. 记为：$x = f(t)$, t 称为函数的自变量.
  - 自变量的微分: $dt = t - t_0$ (增量足够小时)
- 泛函
  - 对于某一类函数 $x(\cdot)$ 中的每一个函数 $x(t)$，变量 J 都有一个值与之相对应，那么变量 J 称作依赖于函数 $x(t)$ 的泛函. 记为: $J = J[x(t)]$, $x(t)$ 称为泛函的宗量
  - 宗量的变分: $\delta x = x(t) - x_0(t)$

变分

关于变分，可将泛函的变分概念看成是函数微分概念的推广, 其作用如同微分在函数中的作用.

变分: 若连续泛函 $J(x(t))$ 的增量可表示为

$$\begin{aligned}\Delta J &= J(x(t)+\delta x(t)) - J(x(t)) \\ &= L(x(t), \delta x(t)) + r(x(t), \delta x(t))\end{aligned}$$

其中第一项是 $\delta x(t)$ 的连续线性泛函，第二项是关于 $\delta x(t)$ 的高阶无穷小，则称上式第一项为泛函的变分, 记做

$$\delta J = L(x(t), \delta x(t))$$

如同函数的微分是函数增量的线性主部一样，泛函的变分就是泛函增量的线性主部.

显然，直接用定义求泛函的变分很困难. 因此, 必须寻求一种计算方法.

变分

像函数的微分一样, 泛函的变分可以利用求导方法来确定.

泛函的变分计算方法: 设 $J(x)$ 是线性碱范空间 R^n 上的连续泛函, 若在 $x=x_0$ 处 $J(x)$ 是可微的, $x, x_0 \in R^n$, 则其变分为

$$\delta J\left(x_0, \delta x\right)=\left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon} J\left(x_0, \varepsilon \delta x\right)\right|_{\varepsilon=0}, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$$

为了确定泛函的极小值或极大值，需要考察泛函的二次变分.

泛函的二次变分: 设 $J(x)$ 是线性赋范空间 R^n 上的连续泛函, 若在 $x=x_0$ 处二次可微, 其中 $x \in R^n, x_0 \in R^n$, 则泛函的二次微分 $J^{(2)}\left(x_0\right)(\delta x)^2$ 称为泛函 $J(x)$ 在 $x=x_0$ 处的二次变分, 记为 $\delta^2 J\left(x_0, \delta x\right)$.

泛函的二次变分计算方法: 设 $J(x)$ 是线性赋范空间 R^n 上的连续泛函, 若在 $x=x_0$ 处 $J(x)$ 是二次可微的, 则其二次变分为

$$\delta^2 J\left(x_0, \delta x\right)=\left.\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} J\left(x_0, \varepsilon \delta x\right)\right|_{\varepsilon=0}, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$$

变分

泛函极值: 设 $J(x)$ 是线性赋范空间 R^n 中某个子集 D 上的线性连续泛函, 点 $x_0 \in D$, 若存在某一正数 σ, 使集合 $U(x_0,\sigma) = \{x \mid \|x - x_0\| < \sigma, x \in R^n\}$ 在 $x \in U(x_0,\sigma) \subset D$ 时, 均有 $\Delta J(x) = J(x) - J(x_0) \geqslant 0$, 则称泛函 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处达到极小值; 若 $\Delta J(x) = J(x) - J(x_0) \leqslant 0$, 则称泛函 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处达到极大值.

泛函极值的必要条件(泛函极值定理): 设 $J(x)$ 是在线性赋范空间 R^n 中某个开子集 D 上定义的可微泛函, 且在 $x = x_0$ 处达到极值, 其中 $x \in R^n, x_0 \in R^n$, 则泛函 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处必有

$$\delta J(x_0, \delta x) = 0$$

泛函极小值的充要条件: 设 $J(x)$ 是在线性赋范空间 R^n 中某个开子集 D 上定义的泛函, 且在 $x = x_0$ 处存在二次变分, 其中 $x \in R^n, x_0 \in R^n$. 如果

$$\delta J(x_0, \delta x) = 0, \delta^2 J(x_0, \delta x) > 0$$

则泛函 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处达到极小值.

无约束泛函极值的必要条件

无约束和有约束情况下，泛函极值存在的必要条件——欧拉方程．这里所提到的约束或无约束是指状态 $x(t)$ 的约束问题．无约束, 指求解最优控制解时状态无约束，即无状态方程的约束．

假定现在考虑最简单的两端固定问题, 其 t_0 及 t_f 固定, 两点边界条件已知为 $x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f$, 则无约束泛函极值问题可以描述如下:

问题 7.1 无约束泛函极值问题为

$$\min_x J(x) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

式中 $L(x, \dot{x}, t)$ 及 $x(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续可微, t_0 及 t_f 固定．已知 $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f, x(t) \in R^n$, 求满足式 (??)的极值轨线 $x^*(t)$．

Theorem

对于问题 7.1, 使性能泛函 $J(x) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, t)\mathrm{d}t$ 取极值的必要条件, 是轨线 $x(t)$ 满足欧拉方程:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

有等式约束的泛函极值的必要条件

在最优控制问题中，泛函 $J[x(t)]$ 所依赖的函数 $x(t)$ 往往会受到一定约束条件的限制．在动态最优化问题中，由于受控系统的数学模型往往用微分方程来描述，所以等式约束就是系统的状态方程．

我们仍然先考虑最简单的两端固定问题．设性能泛函为拉格朗日问题, 系统运动微分方程取为 $f(x, \dot{x}, t) = 0$, 式中 $x \in R^n, f(\cdot)$ 为 n 维向量函数．于是, 有等式约束的泛函极值问题可以描述为:

问题 7.2

$$\min_{x} J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x, \dot{x}, t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$\text{s.t. } f(x, \dot{x}, t) = 0 \tag{3}$$

式中 $g(x, \dot{x}, t)$ 及 $x(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续可微, t_0 及 t_f 固定．已知 $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f, x \in R^n, f(\cdot) \in R^n$．求满足式(??)及式(??)的极值轨线 $x^*(t)$．

解决有约束问题方法：将有约束问题转化为无约束问题，利用无约束的结论．通过引入拉格朗日乘子向量，解决这个问题．

Theorem

对于问题 7.2, 在约束条件(??)下, 使泛函(??)取极值的必要条件, 是轨线 $x(t)$ 满足欧拉方程: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$, *其中*
$L(x, \dot{x}, \lambda, t) = g(x, \dot{x}, t) + \lambda^{\mathrm{T}}(t) f(x, \dot{x}, t)$, $\lambda \in R^n$ *为待定拉格朗日乘子向量．*

泛函极小值的充分条件

欧拉方程只是泛函取极值的必要条件．为了确定极植的性质，需要给出泛函取极小值的充分条件．

无约束情况

Theorem

对于问题 7.1，使性能泛函(??)成立的充分条件是：除欧拉方程成立外，下列等价勒让德条件之一应成立：

- $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\right)^{\mathrm{T}} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix} > 0$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \geqslant 0, \quad \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} > 0$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} > 0, \quad \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \geqslant 0$

泛函极小值的充分条件

有约束情况

Theorem

对于问题 7.2，在约束条件(??)下，使性能泛函(??)成立的充分条件是：除欧拉方程应成立外，下列等价勒让德条件之一应成立：

- $$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\right)^{\mathrm{T}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \end{vmatrix} > 0$$
- $$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \geqslant 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} > 0$$
- $$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} > 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \geq 0$$

横截条件

横截条件：两点边界满足的条件.

前面讨论的是最简单的情况：两端固定（初始状态和末端状态）且初始时刻和末端时刻都固定，在工程实际中存在许多复杂的情况：

- 末端时刻固定时的横截条件
  - 固定起点和终点：$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f$
  - 自由起点和终点：$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f} = 0$
  - 自由起点和固定终点：$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0} = 0, \quad x(t_f) = x_f$
  - 固定起点和自由终点：$x(t_0) = x_0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f} = 0$
- 末端时刻自由时的横截条件
- 初始时刻自由时的横截条件

用变分法解最优控制问题

例 1 设一阶系统方程为

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 3$$

要求确定最优控制函数 $u^*(t)$ 及最优轨线 $x^*(t)$, 在 $t = 2$ 时将系统转移到 $x(2) = 0$, 并使下列性能泛函极小:

$$J = \int_0^2 \left(1 + u^2\right) \mathrm{d}t$$

解: 若从系统方程中解出 $u(t)$, 即

$$u(t) = \dot{x}(t) + x(t)$$

将其代人性能泛函, 得

$$J = \int_0^2 \left(1 + \dot{x}^2 + 2x\dot{x} + x^2\right) \mathrm{d}t$$

于是, 性能泛函中只含一个宗量 $x(t)$. 本例属于末端时刻固定、初态和末态两端固定、积分型性能泛函的变分问题.

用变分法解最优控制问题

令

$$L(x,\dot{x},t)=1+\dot{x}^2+2x\dot{x}+x^2$$

由泛函极值的必要条件, 欧拉方程为

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=x-\ddot{x}=0$$

解得

$$x(t)=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{-t}$$

式中 c_1 和 c_2 为待定常数. 根据横截条件

$$x(0)=3,\quad x(2)=0$$

求出

$$c_1=3\left(1-\mathrm{e}^4\right)^{-1},\quad c_2=3\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right)^{-1}$$

于是, 使给定性能泛函取极值的最优解为

$$u^*(t)=\frac{6}{1-\mathrm{e}^4}\mathrm{e}^t$$

$$x^*(t)=\frac{3}{1-\mathrm{e}^{-4}}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{1-\mathrm{e}^4}\mathrm{e}^t$$

用变分法解最优控制问题

再由无约束泛函极小值的充分条件得

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} = 2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} = 2 > 0$$

故所求得的 $u^*(t)$ 可使性能泛函取极小值.

问题的提出

用变分法求解最优控制时，认为控制向量 $u(t)$ 不受限制．但是实际的系统，控制信号都是受到某种限制的．因此，应用控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ 来确定最优控制，可能出错．

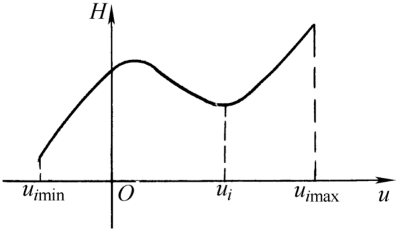

图 2. 哈密顿函数 a

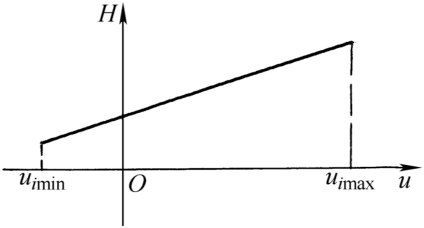

图 3. 哈密顿函数 b

图??中所示，哈密顿函数 H 最小值出现在左侧，不满足控制方程．

图??中不存在 $\frac{\partial H}{\partial u}=0$．

自由末端的极小值原理

定理 对于如下定常系统、末值型性能指标、末端自由、控制受约束的最优控制问题

$$\min_{u(t)\in\Omega} J(u)=\varphi\left[x\left(t_f\right)\right]$$

$$\text{s.t. } \dot{x}(t)=f(x,u), \quad x\left(t_0\right)=x_0, \quad t\in\left[t_0,t_f\right]$$

式中 $x(t)\in R^n$, 为系统状态向量; $u(t)\in R^m$, 为系统控制向量; Ω 为容许控制域; $u(t)$ 是在 Ω 内取值的任何分段连续函数; 末端时刻 t_f 未知; 末态 $x\left(t_f\right)$ 自由. 假设

- 函数 $f(x,u)$ 和 $\varphi(x)$ 都是其自变量的连续函数;
- 函数 $f(x,u)$ 和 $\varphi(x)$ 对于 x 是连续可微的, 即 $\partial f/\partial x^{\mathrm{T}}$ 和 $\partial\varphi/\partial x$ 存在且连续;
- 函数 $f(x,u)$ 在任意有界集上对变量 x 满足李卜希茨条件: 当 $\Omega_1\subset\Omega$ 为有界集时, 存在一常数 $a>0$, 使得只要 $x^1x^2\in x$, 对于任意 $u\in\Omega_1$, 有

$$\left|f\left(x^1,u\right)-f\left(x^2,u\right)\right|\leqslant a\left|x^1-x^2\right|$$

自由末端的极小值原理

则对于最优解 $u^*(t)$ 和 t_f^*, 以及相应的最优轨线 $x^*(t)$, 必存在非零的 n 维向量函数 $\lambda(t)$, 使得

1. $x(t)$ 及 $\lambda(t)$ 满足正则方程:$\dot{x}(t)=\frac{\partial H}{\partial \lambda}$, $\lambda(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}$, 式中哈密顿函数 $H(x,u,\lambda)=\lambda^{\mathrm{T}}(t)f(x,u)$
2. $x(t)$ 及 $\lambda(t)$ 满足边界条件: $x\left(t_0\right)=x_0$, $\lambda\left(t_f\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial x\left(t_f\right)}$
3. 哈密顿函数相对最优控制为极小值

$$H\left(x^*,u^*,\lambda\right)=\min_{u(\iota)\in\Omega} H\left(x^*,u,\lambda\right)$$

4. 哈密顿函数沿最优轨线保持为常数. 当 t_f 固定时

$$H\left[x^*(t),u^*(t),\lambda(t)\right]=H\left[x^*\left(t_f\right),u^*\left(t_f\right),\lambda\left(t_f\right)\right]=\text{const}$$

当 t_f 自由时

$$H\left[x^*\left(t_f^*\right),u^*\left(t_f^*\right),\lambda\left(t_f^*\right)\right]=0$$

自由末端的极小值原理

极小值原理与变分法主要区别在于条件 3:

- 当控制无约束时, 相应条件为 $\partial H/\partial u = 0$;
- 当控制有约束时, $\partial H/\partial u = 0$ 不再成立, 而代之为

$$H\left(x^*(t), u^*(t), \lambda(t)\right) \leq H\left(x^*(t), u(t), \lambda(t)\right), \forall u(t) \in \Omega$$

极小值原理的重要意义:

1. 容许控制条件放宽了.
2. 最优控制使哈密顿函数取全局极小值.
3. 极小值原理不要求哈密顿函数对控制的可微性.
4. 极小值原理给出了最优控制的必要而非充分条件.

说明:

1. 极小值原理给出的只是最优控制应该满足的必要条件.
2. 极小值原理与用变分法求解最优问题相比, 差别仅在于极值条件.
3. 这里给出了极小值原理, 而在庞德里亚金著作论述的是极大值原理. 因为求性能指标的极小值与求 $-J$ 的极大值等价.
4. 非线性时变系统也有极小值原理.

连续系统的极小值原理

极小值原理的一些推广形式

- 时变问题
- 积分型性能指标问题
- 末端受约束的情况
- 复合型性能指标情况

离散欧拉方程

离散欧拉方程: 控制序列不受约束时, 利用离散变分法求解离散系统的最优控制问题.

设系统的差分方程为:

$$x(k+1)=f[x(k),u(k),k],k=0,1,\ldots,N-1$$

系统的性能指标为:

$$J=\sum_{k=0}^{N-1}L[x(k),u(k),x(k+1),k]=\sum_{k=0}^{N-1}L_k$$

离散泛函取得极值的必要条件 (欧拉方程)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L_k}{\partial x(k)}+\dfrac{\partial L_{k-1}}{\partial(k)}=0\\ \dfrac{\partial L_k}{\partial u(k)}=0\end{cases}$$

离散横截条件为:

$$\left[\frac{\partial L_k}{\partial x(k)}\right]^T_{k=N}\delta x(N)-\left[\frac{\partial L_{k-1}}{\partial x(k)}\right]^T_{k=0}\delta x(0)=0$$

若始端固定，末端自由，由离散横截条件得边界条件:

$$x(0)=x_0,\ \frac{\partial L[x(N-1),u(N-1),x(N),N-1]}{\partial x(N)}=0$$

离散系统的极小值原理

定理[1] 设离散系统状态方程

$$x(k+1)=f[x(k),u(k),k],\quad x(0)=x_0,k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4}$$

性能指标

$$J=\varphi[x(N),N]+\sum_{k=0}^{N-1}L[x(k),u(k),k] \tag{5}$$

式中 $f(\cdot)\varphi(\cdot)$ 和 $L(\cdot)$ 都是其自变量的连续可微函数, $x(k)\in R^n$, $u(k)\in R^m$. 控制有不等式约束: $u(k)\in\Omega,\Omega$ 为容许控制域. 末端状态受下列等式约束限制:

$$\psi[x(N),N]=0$$

式中 $\psi(\cdot)\in R^r,r\leqslant n$. 若 $u^*(k)$ 是使性能指标(??)为最小的最优控制序列, $x^*(k)$ 是相应的最优状态序列, 则必存在 r 维非零常向量 γ 和 n 维向量函数 $\lambda(k)$, 使得 $u^*(k)$ 、$x^*(k)$ 和 $\lambda(k)$ 满足如下必要条件:

[1]末端状态受等式约束的情况.

离散系统的极小值原理

1. $x(k)$ 和 $\lambda(k)$ 满足下列差分方程:

$$x(k+1)=\frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)}, \lambda(k)=\frac{\partial H(k)}{\partial x(k)}$$

式中离散哈密顿函数

$$\begin{aligned} H(k) &= H[x(k), u(k), \lambda(k+1), k] \\ &= L[x(k), u(k), k] + \lambda^T(k+1) f[x(k), u(k), k] \end{aligned}$$

2. $x(k)$ 和 $\lambda(k)$ 满足边界条件

$$\begin{aligned} & x(0)=x_0 \\ & \psi[x(N), N]=0 \\ & \lambda(N)=\frac{\partial \varphi[x(N), N]}{\partial x(N)}+\frac{\partial \psi_{\mathrm{T}}[x(N), N]}{\partial x(N)} \gamma \end{aligned}$$

3. 离散哈密顿函数对最优控制 $u^*(k)$ 取极小值

$$\begin{aligned} & H\left[x^*(k), u^*(k), \lambda(k+1), k\right] \\ = & \min_{u(k) \in \Omega} H\left[x^*(k), u(k), \lambda(k+1), k\right] \end{aligned}$$

若控制变量不受约束, 即 $u(k)$ 可以在整个控制空间 R^m 中取值, 则极值条件为

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)}=0$$

多级决策问题

多级决策过程

所谓多级决策过程，是指将一个过程按时间或空间顺序分为若干级(步)，然后给每一级 (步) 作出“决策”(在控制过程中令每走一步所要决定的控制步骤称之为决策)，以使整个过程取得最优的效果，即多次的决策最终要构成一个总的最优控制策略 (最优控制方案).

说明：

1. 全部“决策”总体，成为“策略”.
2. 在多级决策过程中，每一级的输出状态都仅与该级的“决策”及该级的输入状态有关，而与其前面各级的“决策”及状态的转移规律无关. 这种特有性质，称为无后效性.

多级决策问题

最短路线问题

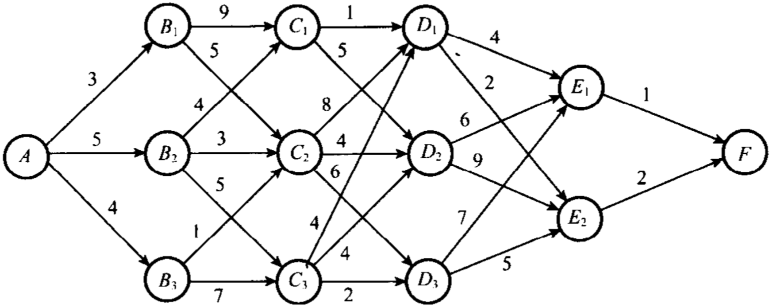

图 4. 最短路线问题

需确定一条最优的汽车行驶路线，使从 S 站到 F 站的行车时间为最短.

多级决策问题

最短路线问题

1. 穷举法.
   - 列出所有可能的组合方案，找出时间最短的一个可能的行车线路.
   - 缺点：计算量大，容易出错.
2. 动态规划法.
   - 一种逆序计算法，从终点开始，按时间最短为目标，逐段向前逆推，依次计算出各站至终点站的时间最优值，据此决策出每一站的最优路线.
   - 特点
     - 将一个多阶段决策问题化为多个单阶段决策问题，易于分析.
     - 每阶段评估只与前一阶段结果有关，计算量减小.

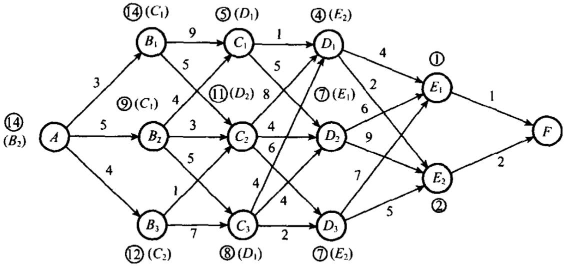

图 5. 决策过程

最优性原理

最优性原理

不论初始状态和初始决策如何，当把其中的任何一级和状态再作为初始级和初始状态时，其余的决策对此必定也是一个最优决策.

表明：若有一个初态 $x(0)$ 的 N 级决策过程, 其最优决策为 $u(0), u(1), , u(N-1)$, 那么, 对于以 $x(1)$ 为初态的 $N-1$ 级决策过程来说, 决策集合 $u(1), u(2), , u(N-1)$ 必定是最优策略.

离散系统动态规划的基本递推方程

问题 设 N 级过程的动态方程为

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k], \quad x(0) = x_0$$

式中状态约束 $x(k) \in X \subset R^n$, 控制 (决策) 约束 $u(k) \in \Omega \subset R^m$, $k = 0, 1, \cdots, N-1$. 求容许控制 (决策) 序列 $u^*(k)$, $k = 0, 1, \cdots, N-1$, 使代价函数 (或性能指标)

$$J[x(0)] = \sum_{k=0}^{N-1} L[x(k), u(k), k]$$

为最小.

动态规划基本方程或贝尔曼泛函方程:

$$J_N^*[x(0)] = \min_{\{u(k)\}} \{J_N\} = \min_{\{u(k)\}} \{L[0] + J_{N-1}[x(1)]\} = \min_{\{u(0)\}} \{L[0] + J_{N-1}^*[x(1)]\}$$

离散系统动态规划的基本递推方程

动态规划基本方程或贝尔曼泛函方程:

$$J_N^*[x(0)] = \min_{\{u(k)\}} \{J_N\} = \min_{\{u(k)\}} \{L[0] + J_{N-1}[x(1)]\} = \min_{\{u(0)\}} \{L[0] + J_{N-1}^*[x(1)]\}$$

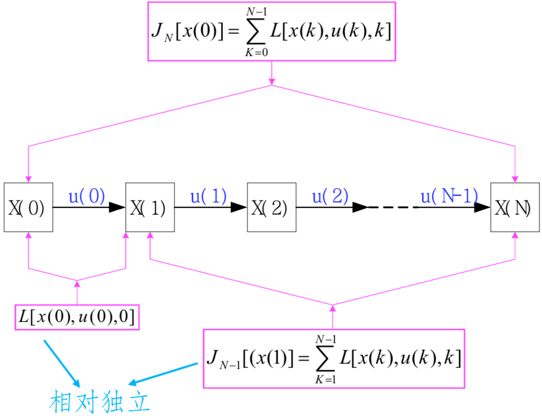

图 6. 决策过程

多级决策问题

关于动态规划本质的讨论:

- 一个最优控制策略具有这样的性质，不论过去的状态及过去的决策如何，如把现在的状态看作后续状态的初态，则其后诸决策仍必须构成一最优策略.
- 动态规划的最优性原理得以成立的前提条件是所谓“无后效性”. 即上一状态和上一决策对后续过程的影响，仅表现在它们把状态转移到了当前状态，至于后续过程如何，他们就不再起作用了.
- 动态规划的解题顺序，与事物发展进程相反.

离散动态规划

问题 设非线性离散系统的状态方程

$$x(k+1)=f[x(k),u(k),k],\quad x(0)=x_0$$

式中状态约束 $x(k)\in X\subset R^n$, 控制约束 $u(k)\in\Omega\subset R^m$, $k=0,1,\cdots,N$. 求最优控制序列 $u^*(k)$, $k=0,1,\cdots,N-1$, 使代价函数

$$J_N[x(0)]=\varphi[x(N),N]+\sum_{k=0}^{N-1}L[x(k),u(k),k]$$

极小.

在上述问题中, 代价函数是复合型的, 更为一般.

求解过程与上节相同.

离散动态规划

利用动态规划数值计算法来求解离散最优控制问题, 原则上也可以适用于高阶系统.

对于非线性系统或非二次型性能指标, 特别是控制变量与状态变量都有不等式约束条件的最优控制问题, 利用动态规划来求解不会产生什么困难, 只要系统的离散模型是正确的, 计算最优解时就可以不必考虑结果是否是局部极小值.

动态规划的明显弱点是: 计算量和存储量随 $x(k)$ 和 $u(k)$ 维数的增加急剧增长. 因此, 动态规划一般用来解决低维最优化问题.

例如, 对于状态向量为 n 维、控制向量为 m 维、时间离散段为 N 的离散系统, 在状态向量的每个元取 p 个值、控制向量的每个元取 q 个值的情况下, 计算性能指标的求值次数为 Np^nq^m 次, 要求存储容量为 $2p^n$ 个字. 假定一次求值的计算时间为 10μs, 取 $N=10$, $p=q=20$, $n=3$, $m=1$, 则需要存储量为 1.6 万个字, 编制表格的时间约需 16 s . 如若 $n=6, m=2$, 其余不变, 则需要存储量为 1.28 亿个字, 计算次数为 2560 亿次, 大约需要 711 小时的离线计算时间. 有时, 巨大的计算量使现代计算机也无能为力. 这正是贝尔曼所指出的: 动态规划的不足是会产生 “维数灾难”.

连续控制系统的动态规划

问题 设连续时间系统的状态方程为

$$\dot{x}(t)=f[x(t),u(t),t],\quad x\left(t_0\right)=x_0 \tag{6}$$

式中 $x(t)\in R^n; u(t)\in\Omega\subset R^m; f(\cdot)\in R^n$ 且连续可微. 目标集约束

$$\psi\left[x\left(t_f\right),t_f\right]=0 \tag{7}$$

式中 $\psi(\cdot)\in R^r, r\leqslant n$. 性能指标

$$J\left[x_0,t_0\right]=\varphi\left[x\left(t_f\right),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_t}L[x(t),u(t),t]\mathrm{d}t \tag{8}$$

假定以 t 为初始时刻, $t\in\left[t_0,t_f\right], x(t)$ 为初始状态时, 函数 $J[x(t),t]$ 连续, 且对 $x(t)$ 和 t 有连续的一阶和二阶偏导数. 要求在容许控制域 Ω 中, 确定最优控制 $u^*(t)$, 使系统(??)由已知初态 x_0 转移到要求的目标集(??), 且使性能指标(??)极小.

连续控制系统的动态规划

设 $u\left[t, t_f\right]$ 表示在区间 $\left[t, t_f\right]$ 上的控制函数, 则最优性能指标可表示为

$$J^*[x(t), t]=\min_{u[t, tt_f] \in \Omega}\left\{\varphi\left[x\left(t_f\right), t_f\right]+\int_t^{t_f f} L[x(\tau), u(\tau), \tau] \mathrm{d} \tau\right\} \tag{9}$$

将最优控制 $u^*(t)$ 的选择过程分为两步: 先选择区间 $\left[t+\Delta t, t_f\right]$ 上的最优控制; 再选择区间 $[t, t+\Delta t)$ 上的最优控制. 根据最优性原理, 式(??)可写为

$$\begin{aligned} J^*[x(t), t]= & \min_{u[t, t+\Delta) \in \Omega}\left\{\min_{u\left[t+\Delta, t_f\right] \in \Omega}\left[\int_t^{t+\Delta t} L[x(\tau), u(\tau), \tau] \mathrm{d} \tau\right.\right. \\ & \left.\left.+\int_{t+\Delta t}^{t_f} L[x(\tau), u(\tau), \tau] \mathrm{d} \tau+\varphi\left[x\left(t_f\right), t_f\right]\right\}\right. \end{aligned} \tag{10}$$

在(??)中, 因为 $\int_t^{t+\Delta} L[x(\tau), u(\tau), \tau] \mathrm{d} \tau$ 与在区间 $\left[t+\Delta t, t_f\right]$ 上的控制 $u\left[t+\Delta t, t_f\right]$ 无关, 且因最优性原理指出

$$J^*[x(t+\Delta t), t+\Delta t]=\min_{u\left[t++, t_f\right] \in \Omega}\left\{\int_{t+\Delta}^{t_f} L[x(\tau), u(\tau), \tau] \mathrm{d} \tau+\varphi\left[x\left(t_f\right), t_f\right]\right\}$$

故(??)可以表示为

$$J^*[x(t), t]=\min_{u[t, t+\Delta t) \in \Omega}\left\{\int_t^{t+\Delta t} L[x(\tau), u(\tau), \tau] \mathrm{d} \tau+J^*[x(t+\Delta t), t+\Delta t]\right\} \tag{11}$$

连续控制系统的动态规划

式(??)右端中的第一项, 根据积分中值定理, 得

$$\int_{t}^{t+\Delta t} L[x(\tau), u(\tau), \tau]\mathrm{d}\tau = L[x(t+\alpha\Delta t), u(t+\alpha\Delta t), t+\alpha\Delta t]\Delta t \tag{12}$$

式中 $0<\alpha<1$. 式(??)右端中的第二项, 由于对 $J^*[x(t), t]$ 连续可微的假设, 可以展成如下泰勒级数:

$$\begin{aligned} &J^*[x(t+\Delta t), t+\Delta t] \\ =&J^*[x(t), t] + \left[\frac{\partial J^*[x(t), t]}{\partial x(t)}\right]^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\Delta t + \frac{\partial J^*[x(t), t]}{\partial t}\Delta t + o\left[(\Delta t)^2\right] \end{aligned} \tag{13}$$

式中 $o\left[(\Delta t)^2\right]$ 表示关于 Δt 的高阶小量, $\partial J^*/\partial x$ 的转置则是为了使向量间的相乘有意义. 将式 (??)和式(??)代人式(??), 经相消和移项后, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^*[x(t), t]}{\partial t} = -\min_{u[t, t+\Delta t)\in\Omega} &\Big\{L[x(t+\alpha\Delta t), u(t+\alpha\Delta t), t+\alpha\Delta t] \\ &+ \left[\frac{\partial J^*[x(t), t]}{\partial x(t)}\right]^{\mathrm{T}} f[x(t), u(t), t] + \frac{o\left[(\Delta t)^2\right]}{\Delta t}\Big\} \end{aligned}$$

在上式中, 令 $\Delta t\to 0$, 考虑到 $o(\Delta t)^2$ 是关于 Δt 的高阶无穷小量, 故有

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} = -\min_{u(t)\in\Omega}\left\{L[x(t), u(t), t] + \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} f[x(t), u(t), t]\right\} \tag{14}$$

式(??)称为哈密顿-雅可比方程, 又称哈密顿-雅可比-贝尔曼方程.

连续控制系统的动态规划

- 最优解的充分条件：对于连续控制系统的动态规划问题，当 $u(t) \in \Omega$ 受到约束时，由(??)得连续动态规划的基本方程

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)\in\Omega}\left\{L(x,u,t) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} f(x,u,t)\right\}$$

- 哈密顿-雅可比方程的解与最优性能指标的关系. 卡尔曼曾经严格论证，指出：
  - 若 $f(x,u,t)\varphi\left[x\left(t_f\right), t_f\right]$ 及 $L(x,u,t)$ 连续可微，且哈密顿-雅可比方程的解 $J^*[x(t),t]$ 二次可微，则哈密顿-雅可比方程的解是最优性能指标的必要且充分条件.
  - 由于哈密顿-雅可比方程的求解十分困难，且其解不一定存在，所以一般说来，哈密顿-雅可比方程只是最优性能指标的充分而非必要条件.
  - 对于线性二次型问题，哈密顿-雅可比方程的求解十分简单，其解是最优性能指标的充分必要条件.
  - 若 $f(x,u,t)$ 和 $L(x,u,t)$ 不满足连续可微条件，则在哈密顿-雅可比方程的推导过程中，$J^*[x(t+\Delta t), t+\Delta t]$ 不能展成泰勒级数. 此时，哈密顿-雅可比方法不能用来求解连续系统的最优化问题.

动态规划与变分法、最小值原理的关系

- 动态规划与变分法: 由哈密尔顿—雅可比—贝尔曼方程可推倒出欧拉方程
- 动态规划与极小值原理: 哈密尔顿—雅可比—贝尔曼方程，本身就是极小值原理的极值条件，通过它还可推倒极小值原理的协态方程和横截条件.

结论:

- 动态规划与变分法和极小值原理在数学上是等效关系.
- 应用范畴有所不同：对某些最优性能指标的可微性条件不能满足的最优控制问题，未必能写出哈密尔顿—雅可比—贝尔曼方程.

线性二次型问题

线性二次型问题：系统为线性系统，性能指标为状态变量与控制变量的二次型函数，这类系统的最优控制问题.

主要内容：最优状态调节、最优输出调节和最优跟踪，其中，最优输出调节问题和最优跟踪问题可以化为最优状态调节问题.

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt$$

线性二次型问题的特点:

1. 最优解可写成统一的解析表达式，实现求解过程规范化.
2. 可以兼顾系统的性能指标 (快速性、准确性、稳定性、灵敏度)

线性二次型问题

线性二次性问题的提法:

设线性时变系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}$$

假设控制向量 $u(t)$ 不受约束, 用 $y_l(t)$ 表示期望输出, 则误差向量为 $e(t) = y_l(t) - y(t)$. 求最优控制 $u^*(t)$, 使下列二次型性能指标最小.

$$J(u) = \frac{1}{2} e^T(t_f) F e(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[e^T(t) Q(t) e(t) + u(t)^T R(t) u(t) \right] dt$$

其中, F: 半正定对称常数加权矩阵; $Q(t)$: 半正定对称时变加权矩阵; $R(t)$: 正定对称时变加权矩阵; t_0 及 t_f 固定.

说明: 正定二次型 $x^TAx > 0$, $\forall x \neq 0$; 半正定二次型 $x^TAx \geq 0$, $\forall x \neq 0$; 实对称阵 A 为正定 (半正定) 的充要条件是全部特征值 $> 0 (>= 0)$.

线性二次型问题

性能指标的物理含义:

- $L_e = \frac{1}{2} e(t)^T Q(t) e(t) \geq 0$: 状态转移过程中衡量 $e(t)$ 大小的代价函数.
- $L_u = \frac{1}{2} u(t)^T R(t) u(t) > 0$: 状态转移过程中衡量 $u(t)$ 大小的代价函数.
- $\phi(t_f) = \frac{1}{2} e(t_f)^T F e(t_f) \geq 0$: 终端代价函数 (衡量终点误差).

加权矩阵的意义:

- F, Q, R 是衡量误差分量和控制分量的加权矩阵, 可根据各分量的重要性灵活选取.
- 采用时变矩阵 $Q(t), R(t)$ 更能适应各种特殊情况.

线性二次型问题的本质: 用不大的控制，来保持较小的误差，以达到能量和误差综合最优的目的.

线性二次型问题

线性二次型问题的三种重要情形:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t)$$
$$e(t) = y_l(t) - y(t)$$

1. $C(t) = I \quad y_l(t) = 0 \quad y(t) = x(t) = -e(t)$ 状态调节器

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[x^T(t)Q(t)x(t) + u(t)^T R(t)u(t)\right]dt$$

2. $y_l(t) = 0 \quad y(t) = -e(t)$ 输出调节器

$$J = \frac{1}{2}y^T(t_f)Fy(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_t}\left[y^T(t)Q(t)y(t) + u(t)^T R(t)u(t)\right]dt$$

3. $y_l(t) \neq 0 \quad e(t) = y_r(t) - y(t)$ 跟踪问题

$$J = \frac{1}{2}e^T(t_f)Fe(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[e^T(t)Q(t)e(t) + u(t)^T R(t)u(t)\right]dt$$

状态调节器问题

状态调节器问题, 就是要求系统的状态保持在平衡状态附件.
分两种情况讨论: 终端时间 $t \neq \infty$, 有限时间问题; 终端时间 $t = \infty$, 无限时间问题.

有限时间状态调节器问题

问题描述: 设线性时变系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

初始条件 $x(t_0) = x_0$, 终端时间 $t \neq \infty$

假设控制向量 $u(t)$ 不受约束, 求最优控制 $u^*(t)$ 使系统的二次型性能指标取极小值.

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{i_0}^{t_0} \left[x^T(t) Q(t) x(t) + u(t)^T R(t) u(t) \right] dt$$

物理意义: 以较小的控制能量为代价, 使状态保持在零值附近.

有限时间状态调节器问题

最优解的充分必要条件

对于最优调节器问题, 最优控制的充分必要条件是

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t) \tag{15}$$

最优性能指标为

$$J^* = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\left(t_0\right)P\left(t_0\right)x\left(t_0\right)$$

式中 $n \times n$ 维对称非负矩阵 $P(t)$ 满足黎卡提矩阵微分方程

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^{\mathrm{T}}(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t) + Q(t) \tag{16}$$

其边界条件为

$$P\left(t_f\right) = F \tag{17}$$

而最优轨线 $x^*(t)$, 则是下列线性向量微分方程的解:

$$\dot{x}(t) = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)\right]x(t), x\left(t_0\right) = x_0$$

有限时间状态调节器问题

黎卡提方程解的若干性质

- $P(t)$ 是唯一的.
- $P(t)$ 是对称的.
- $P(t)$ 是非负的.

最优控制解的存在性与唯一性

对于最优调节器问题, 若 t_f 有限, 则式(??)给出的最优控制 $u^*(t)$ 存在且唯一.

例 2 已知一阶系统状态方程

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{2}x(t)+u(t), \quad x\left(t_0\right)=x_0$$

性能指标

$$J\left[x\left(t_0\right), t_0, u(t)\right]=\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}x^2(t)+2\mathrm{e}^{-t}u^2(t)\right]\mathrm{d}t$$

试求最优控制 $u^*(t)$ 及最优指标 $J^*\left[x\left(t_0\right), t_0\right]$.

有限时间状态调节器问题

解: 由题意, $A=\frac{1}{2}, B=1, F=0, Q(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}, R(t)=2\mathrm{e}^{-t}$. 黎卡提方程(??)及其边界条件(??)可写为

$$-\dot{p}(t)=p(t)-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}p^{2}(t)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}, \quad p\left(t_f\right)=0$$

等价黎卡提方程

$$-\dot{\hat{p}}(t)=-\frac{1}{2}\hat{p}^{2}(t)+\frac{1}{2}, \quad \hat{p}\left(t_f\right)=0$$

解得

$$\hat{p}(t)=\frac{1-\mathrm{e}^{t-t_f}}{1+\mathrm{e}^{t-t_f}}$$

可以算出等价最优控制

$$\hat{u}^{*}(t)=-\hat{R}^{-1}(t)\hat{B}^{\mathrm{T}}(t)\hat{p}(t)\hat{x}(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\hat{p}(t)x(t)$$

从而, 原系统的最优控制为

$$u^{*}(t)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\hat{u}^{*}(t)=-\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{t-t_f}\right)\left(1+\mathrm{e}^{t-t_f}\right)^{-1}x(t)$$

不难算出原系统的最优指标

$$\begin{aligned}J^{*}\left[x\left(t_0\right),\left(t_0\right)\right]&=x^{\mathrm{T}}\left(t_0\right)P\left(t_0\right)x\left(t_0\right)\\&=\left(1-\mathrm{e}^{t_0-t_f}\right)\left(\mathrm{e}^{t_0}+\mathrm{e}^{2t_0-t_f}\right)^{-1}x^{2}\left(t_0\right)\end{aligned}$$

有限时间状态调节器问题

状态调节器的设计步骤

1. 根据系统要求和工程实际经验，选取加权矩阵 F, Q, R
2. 求解黎卡提微分方程，求得矩阵 $P(t)$

$$
\begin{aligned}
\dot{P} &= -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \\
P(t_f) &= F
\end{aligned}
$$

3. 求反馈增益矩阵 $K(t)$ 及最优控制 $u^*(t)$

$$u(t)^* = -K(t)x(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t)$$

4. 求解最优轨线 $x^*(t)$
5. 计算性能指标最优值

$$J^*[x(t), t] = \frac{1}{2}x(t)^T P(t)x(t)^T$$

无限时间状态调节器问题

无限时间时变状态调节器

问题描述

设线性时变系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

初始条件 $x(t_0) = x_0$，终端时间 $t_f = \infty$

假设控制向量 $u(t)$ 泝受约束，求最优控制 $u^*(t)$，使系统的二次型性能指标取极小值.

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[x^T(t)Q(t)x(t) + u(t)^T R(t)u(t)\right] dt$$

无限时间状态调节器问题

对于无限时间时变状态调节器问题, 若阵对 $\{A(t), B(t)\}$ 完全可控, 则存在唯一的最优控制

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\overline{P}(t)x(t)$$

最优性能指标为

$$J^* = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_0)\overline{P}(t_0)x(t_0)$$

式中

$$\overline{P}(t) = \lim_{t_f \to \infty} P(t)$$

是对称、非负的, 而 $P(t)$ 是如下黎卡提方程:

$$\begin{aligned} -\dot{P}(t) = & P(t)A(t) + A^{\mathrm{T}}(t)P(t) \\ & - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t) + Q(t) \end{aligned}$$

及其边界条件

$$P(t_f) = 0$$

的唯一解.

无限时间状态调节器问题

无限时间定常状态调节器

问题描述

设线性定常系统状态方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{18}$$

性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} [x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\mathrm{d}t \tag{19}$$

式中 $x(t) \in R^n; u(t) \in R^m$, 且无约束; A, B, Q 和 R 是维数适当的常数矩阵. 并且, Q 和 R 分别为非负定和正定对称矩阵. 要求确定最优控制 $u^*(t)$, 使性能指标(??)极小.

无限时间状态调节器问题

对于系统(??)和性能指标(??), 若对于任意矩阵 D, 有 $DD^{\mathrm{T}} = Q$, 且 $\overline{P}$ 是如下黎卡提矩阵代数方程:

$$\overline{P}A + A^{\mathrm{T}}\overline{P} - \overline{P}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P} + Q = 0$$

的解, 则阵对 $\{A, D\}$ 完全可观的充分必要条件是 $\overline{P}$ 为对称正定矩阵.

对于无限时间定常状态调节器问题, 若阵对 $\{A, B\}$ 完全可控, 阵对 $\{A, D\}$ 完全可观, 其中 $DD^{\mathrm{T}} = Q$, 且 D 任意, 则存在唯一的最优控制

$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}x(t)$$

最优性能指标为

$$J^* = \frac{1}{2}x_0^{\mathrm{T}}\overline{P}x_0$$

式中 $\vec{P}$ 为对称正定常阵, 是下列黎卡提矩阵代数方程的唯一解

$$\overline{P}A + A^{\mathrm{T}}\overline{P} - \overline{P}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P} + Q = 0$$