

第 6 章 控制系统的综合

温 杰

wen.jie@outlook.com

中北大学, 电气与控制工程学院

2023 年 春季学期

提纲

引言

状态反馈和输出反馈

- 状态反馈

- 输出反馈

- 状态反馈与输出反馈比较

极点配置

- 状态反馈极点配置

- 输出反馈极点配置

- 系统镇定

状态观测器

带状态观测器的状态反馈系统

- 带状态观测器的状态反馈系统的结构

- 带状态观测器的状态反馈系统的特性

解耦控制

- 解耦的定义

- 串联解耦

- 状态反馈解耦

引言

系统综合是在已知系统结构和参数的情况下，确定需要施加于系统的外部输入或控制律，以使系统具有期望的运动特性或某些特征。

反馈是控制理论中一个经典而重要的概念，是改善系统性能的一种重要方式。本章将在状态空间分析的基础上，讨论如何运用反馈对线性定常系统进行综合。

状态反馈和输出反馈

设受控系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

式中,

- x 为 n 维状态向量;
- u 为 r 维输入向量;
- y 为 m 维输出向量;
- A 为 $n \times n$ 维系统矩阵;
- B 为 $n \times r$ 维输入矩阵;
- C 为 $m \times n$ 维输出矩阵.

通常简记式 (1) 为 $\Sigma(A, B, C)$.

状态反馈

状态反馈是将受控系统的每一个状态变量乘以相应的系数，反馈到受控系统的输入端，与参考输入一起形成控制律。

采用状态反馈对受控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 进行控制，如图1所示。

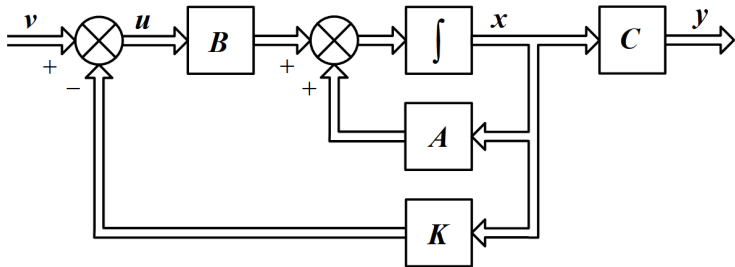


图 1. 状态反馈结构图

状态反馈

设状态反馈控制律为

$$u = v - Kx$$

式中,

- v 为 r 维参考输入向量;
- K 为 $r \times n$ 维状态反馈阵.

对于单输入系统, K 为 n 维行向量.

得到的状态反馈闭环系统 (或称状态反馈系统) 的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

简记为 $\Sigma(A - BK, B, C)$.

说明:

- ① 状态反馈系统 $\Sigma(A - BK, B, C)$ 的维数与受控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的维数相同, 即采用状态反馈不增加状态变量的个数.
- ② 状态反馈系统 $\Sigma(A - BK, B, C)$ 的系统矩阵为 $A - BK$, 通过选择状态反馈阵 K 可以改变闭环系统的特征值 (极点).

输出反馈

输出反馈是将受控系统的输出变量乘以相应的系数，反馈到受控系统的输入端，与参考输入一起形成控制律。

采用输出反馈对受控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 进行控制，如图2所示。

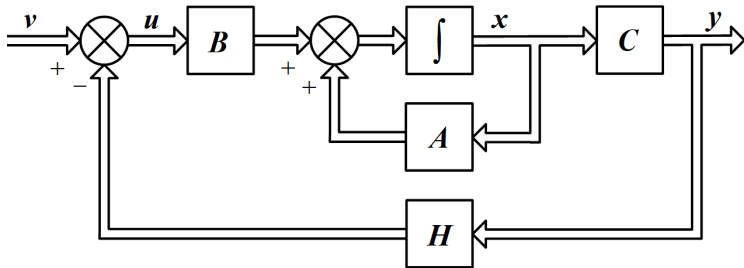


图 2. 状态反馈结构图

输出反馈

设输出反馈控制律为

$$u = v - Hy$$

式中,

- v 为 r 维参考输入向量;
- H 为 $r \times m$ 维状态反馈阵.

对于单输入系统, H 为 r 维列向量.

得到的输出反馈闭环系统 (或称输出反馈系统) 的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BHC)x + Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

简记为 $\Sigma(A - BHC, B, C)$.

说明:

- ① 输出反馈系统 $\Sigma(A - BHC, B, C)$ 的维数与受控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的维数相同, 即采用输出反馈不增加状态变量的个数.
- ② 输出反馈系统 $\Sigma(A - BHC, B, C)$ 的系统矩阵为 $A - BHC$, 通过选择输出反馈阵 H 可以改变闭环系统的特征值 (极点).

输出反馈

受控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的传递函数阵为

$$G_0(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

输出反馈系统 $\Sigma(A - BHC, B, C)$ 的传递函数阵为

$$G_H(s) = C[sI - (A - BHC)]^{-1}B$$

二者之间有如下关系

$$G_H(s) = [I + G_0(s)H]^{-1} G_0(s)$$

或

$$G_H(s) = G_0(s) [I + HG_0(s)]^{-1}$$

对于单输入单输出系统, $G_0(s)$ 和 $G_H(s)$ 都是标量, 有

$$G_H(s) = \frac{G_0(s)}{1 + HG_0(s)}$$

状态反馈与输出反馈比较

- ① 状态反馈系统保持受控系统的能控性，但不一定保持受控系统的能观性。输出反馈系统保持受控系统的能控性和能观性。
- ② 状态是系统运动状况的完全描述，因此状态反馈是系统动态信息的完全反馈。而对于任意的 H ，都可以找到满足 $K = HC$ 的 K ，即采用输出反馈可以实现的控制都可以采用状态反馈来实现。
- ③ 实际中，反馈系统的直接反馈变量必须是能够有效测量的。状态变量选择的多样性和复杂性，可能使系统的有些状态变量不能够有效测量。在这种情况下，如果采用状态反馈，就需要引入状态观测器来对真实状态进行估计或重构，状态观测器的引入会增大闭环系统的维数。而系统的输出通常都是可以测量的，可以直接反馈。可见，输出反馈在技术实现上比状态反馈更方便。

极点配置

线性定常系统的稳定性取决于闭环极点，动态特性也在很大程度上依赖于闭环极点。

已知，状态反馈和输出反馈可以改变闭环系统的特征值（极点）。通过选择适当的反馈形式和反馈矩阵，使闭环系统具有期望极点的问题称为**极点配置**。

如果能够采用反馈任意地配置闭环系统的极点，就可以任意地改变系统的一些重要性质，使系统获得期望的性能。

状态反馈极点配置

极点配置定理

状态反馈只能改变系统中能控部分的极点，而不能改变不能控部分的极点。

对于受控系统 $\Sigma(A, B, C)$ ，采用状态反馈任意配置闭环极点的充要条件是，受控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 是完全能控的。

说明：

状态反馈只能改变系统的极点，对系统的零点没有影响。但在状态反馈系统 $\Sigma(A - BK, B, C)$ 的传递函数阵 $G_K(s)$ 中有可能出现新的极点与原有零点相消。

所以，状态反馈不一定保持受控系统的能观测性。

状态反馈极点配置

直接代入法确定 K:

- ① 设受控系统 $\sum(A, B, C)$ 的状态反馈阵 K 为 $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$, 代入求出状态反馈系统 $\sum(A - BK, B, C)$ 的特征多项式

$$f(s) = |sI - (A - BK)|$$

- ② (2) 由期望极点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 求出状态反馈系统 $\sum(A - BK, B, C)$ 的期望特征多项式:

$$\begin{aligned} f^*(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) \\ &= s^n + a_1^* s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}^* s + a_n^* \end{aligned}$$

- ③ 令 $f(s) = f^*(s)$, 根据等式两端同次幂的系数相等, 确定状态反馈阵 K.

状态反馈极点配置

第二种确定状态反馈阵 K 方法:

- ① 计算能控性判别矩阵 $U_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$ 及其逆 U_c^{-1} .
- ② 由期望极点 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 可求得闭环特征方程为:

$$\begin{aligned} f(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) \\ &= s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \end{aligned}$$

- ③ 根据 $f(s)$, 可求得

$$f(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I$$

- ④ 状态反馈阵 $K = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] U_c^{-1} f(A)$.

状态反馈极点配置

例 1 已知受控系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad -1] x\end{aligned}$$

试设计状态反馈阵 K , 使闭环系统的极点为 $-1, -2$.

解: (1) 判断受控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的能控性. 能控性矩阵为

$$U = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于 $\text{rank}U = 2$, 所以受控系统完全能控, 可采用状态反馈任意配置闭环系统的极点.

状态反馈极点配置

(2) 设状态反馈阵为 $K = [k_1, k_2]$, 代入状态反馈系统的特征多项式, 有

$$\begin{aligned} f(s) &= |sI - (A - BK)| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1, k_2] \right| \\ &= \begin{vmatrix} s + 2 + k_1 & -1 + k_2 \\ -1 & s + 2 \end{vmatrix} = s^2 + (4 + k_1)s + (3 + 2k_1 + k_2) \end{aligned}$$

(3) 由期望极点 $-1, -2$, 得状态反馈系统的期望特征多项式为

$$f^*(s) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

令 $f(s) = f^*(s)$, 比较等式两端同次幂的系数, 可得

$$k_1 = -1, k_2 = 1$$

状态反馈阵为: $K = [-1, 1]$.

状态反馈极点配置

例 2 已知受控系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试分析能否采用状态反馈将闭环极点配置为以下两组极点: (1) $\{-1, -2, -2\}$; (2) $\{-2, -2, -3\}$.

解: (1) 判断受控系统的能控性. 能控性矩阵为

$$U = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

由于 $\text{rank } U = 2$, 所以受控系统不完全能控, 不能采用状态反馈任意配置所有闭环极点.

状态反馈极点配置

(2) 构造非奇异变换矩阵 T_c , 即 $T_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

经过线性变换 $x = T_c \bar{x}$, 可将受控系统按能控性分解为:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

可得能控部分的极点为 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}j$, 不能控部分的极点为 -1 .

第一组期望极点为 $\{-1, -2, -2\}$, 其中 -1 恰为不能控部分极点, 只要将能控部分两个极点配置到 $-2, -2$ 即可配置这组极点.

第二组期望极点为 $\{-2, -2, -3\}$, 其中每个极点都与不能控部分极点 -1 不同, 故无法配置这组极点.

输出反馈极点配置

对于受控系统 $\Sigma(A, B, C)$ ，采用输出反馈可以改变系统的极点，但不能任意配置闭环系统的极点。

这一点，经典控制系统输出信息通过闭环负反馈，极点也不是任意选择的。至多将系统极点配置到某一个参数变化时所对应的轨迹线上（根轨迹）。只有附加校正网络，改变根轨迹走向，在可以实现灵活的极点配置。

现代控制理论的方法，同样可以引入动态补偿器来校正系统。

对于完全能控的单变量系统 $\Sigma(A, B, C)$ ，通过带动态补偿器的输出反馈实现任意配置极点的充要条件是：

- ① 系统 $\Sigma(A, B, C)$ 可观；
- ② 动态补偿器阶数为 $n - 1$ 。

系统镇定

系统镇定是指，当受控系统 $\sum(A, B, C)$ 开环不稳定时，通过反馈使闭环极点均具有负实部，从而使闭环系统渐近稳定。

系统镇定实际上是极点配置的一种特殊情况，只要将具有非负实部的极点配置在 s 左半平面就可使系统镇定。

系统状态反馈能镇定的条件：

- ① 受控系统 $\sum(A, B, C)$ 完全能控是系统状态反馈能镇定的充分条件。
- ② 受控系统 $\sum(A, B, C)$ 状态反馈能镇定的充要条件是，系统中不能控部分的极点都具有负实部。

状态观测器

引入状态反馈可以得到较好的系统性能。而实现状态反馈的前提是状态变量必须能用传感器测量得到。但是由于种种原因，状态变量并不是都可测量得到。例如，系统中的某些状态基于系统的结构特性或者是状态变量本身无物理意义，而无法测得；有些状态变量虽然可以测量得到，但应用的传感器价格很贵；有些状态信号很脆弱，在测量点易混进噪声，使得这些状态实际上难以应用。

上述情况表明，我们得不到实际能应用的系统状态变量。运用状态反馈又必须有可应用的状态变量，怎么办呢？能否通过系统的输入量和输出量来构造系统的状态呢？回答是肯定的。可以根据系统的输入量、输出量和系统结构、参数来实现系统的状态重构。实现状态重构的系统称为状态观测器。

状态观测器

解决系统状态重构的一个直观想法是构造一个系统（模拟装置或者数字部件），各状态均可以量测；令其结构、参数与原系统相同，输入为原系统的输入 $u(t)$ 。于是得到如下的系统方程：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

这样的装置叫做开环状态估计器。

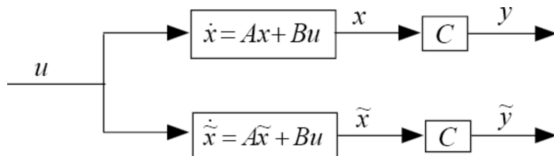


图 3. 开环状态观测器示意图

状态观测器

但是存在模型不确定性和扰动！初始状态未知！

实际中，需要应用反馈校正思想来实现状态重构。通过误差来校正系统。

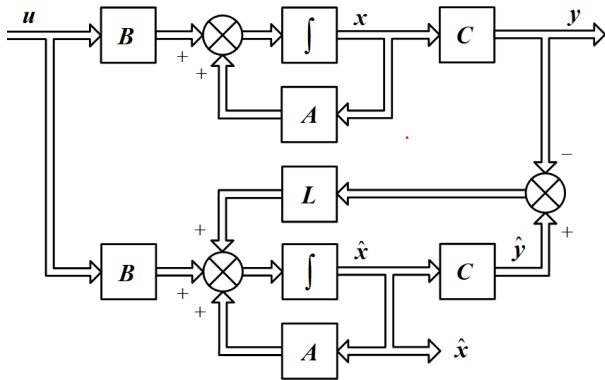


图 4. 闭环状态观测器示意图

状态观测器

这样就得到受控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的全维观测器:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

式中, L 是 $n \times m$ 维矩阵, 称为观测器的反馈矩阵. 对于单输出系统, L 为 n 维列向量.

其估计误差 $\Delta x = \hat{x} - x$ 的方程为:

$$\Delta \dot{x} = A(\hat{x} - x) - LC\hat{x} + LCx = (A - LC) \cdot \Delta x$$

问题转化为通过选择 L , 任意配置误差状态方程的极点. 理论上希望配置极点使得误差衰减足够快, 但实际上 y 总会有噪声, 如果误差衰减太快, 要求 L 元素数值较大, 容易导致噪声放大.

兼顾观测器误差的衰减和系统抗扰动能力. 实际中设计观测器极点比系统极点快 2~5 倍.

状态观测器

全维观测器存在和极点配置的条件:

- 对于受控系统 $\Sigma(A, B, C)$, 其全维观测器

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

的极点可以任意配置的充分条件是, 该系统是完全能观的.

- 对于受控系统 $\Sigma(A, B, C)$, 其全维观测器

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

存在的充要条件是, 不能观测部分的极点都具有负实部¹.

¹不可任意配置

状态观测器

例 3 已知受控系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

试设计全维观测器, 使其极点为 $-10, -10$.

解: (1) 能观测性矩阵为: $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

由于 $\text{rank } V = 2$, 所以受控系统完全能观测, 可以任意配置其全维观测器的极点.

(2) 设全维观测器的反馈矩阵 L 为: $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$

则其特征多项式为:

$$\begin{aligned} f(s) &= |sI - (A - LC)| = \begin{vmatrix} s + 1 + 2l_1 & -1 \\ 2l_2 & s + 2 \end{vmatrix} \\ &= s^2 + (3 + 2l_1)s + (2 + 4l_1 + 2l_2) \end{aligned}$$

状态观测器

(3) 由期望极点 $-10, -10$, 求出全维观测器的期望特征多项式为:

$$f^*(s) = (s + 10)(s + 10) = s^2 + 20s + 100$$

(4) 令 $f(s) = f^*(s)$, 比较等式两端同次幂的系数, 可得全维观测器的反馈矩阵为:

$$L = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 32 \end{bmatrix}$$

可得全维观测器的状态方程为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ &= \begin{bmatrix} -18 & 1 \\ -64 & -2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 8.5 \\ 32 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

状态观测器

受控系统及其全维观测器的模拟结构图如图5所示。

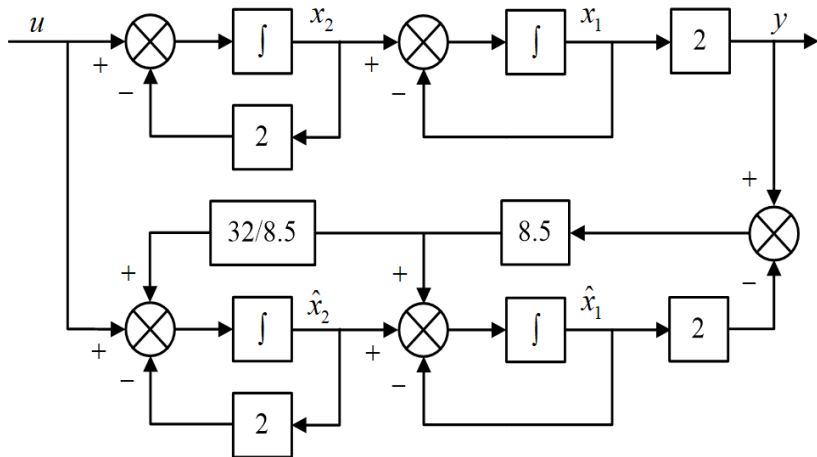


图 5. 全维观测器模拟结构图

说明：模型不确定和初值不一致，否则开环即可。

状态观测器

按照上述方法设计得到的是与状态变量维数相同的全维观测器。在应用中，还可以利用 y 本身已观测到的状态维数，只需要估计未观测部分的维数即可。这就是所谓降维观测器。

状态观测器使得对系统全部状态观测或估计成为可能，进一步可以设计带状态观测器的反馈系统。使状态反馈（输出反馈）得到工程化实现。

带状态观测器的状态反馈系统的结构

设受控系统 $\sum(A, B, C)$ 是完全能控且完全能观测的, 于是可以设计状态观测器实现状态反馈.

设全维观测器的状态方程为:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

式中, L 为状态观测器的反馈矩阵.

设状态反馈控制律为:

$$u = v - K\hat{x}$$

式中, K 为状态反馈阵.

这样就构成一个带状态观测器的状态反馈系统.

带状态观测器的状态反馈系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BK\hat{x} + Bu \\ \dot{\hat{x}} = LCx + (A - LC - BK)\hat{x} + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

可见, 带状态观测器的状态反馈系统的维数为 $2n$, 是受控系统和全维观测器的维数之和. 如果观测器是降维的, 那么带状态观测器的状态反馈系统的维数等于受控系统和降维观测器的维数之和.

带状态观测器的状态反馈系统的结构

带状态观测器的状态反馈系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \end{cases}$$

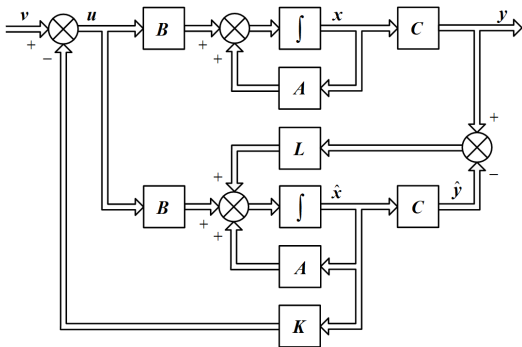


图 6. 带状态观测器的状态反馈系统

带状态观测器的状态反馈系统的特性

- ① **分离特性:** 带状态观测器的状态反馈系统的设计包括两部分
 - 状态反馈设计: 确定状态反馈阵 K ;
 - 状态观测器设计: 确定状态观测器的反馈矩阵 L .
- ② **传递函数阵的不变性:** 带状态观测器的状态反馈系统的传递函数阵与直接状态反馈系统的传递函数阵相等, 两种状态反馈系统的输入输出关系或外部特性一致, 状态观测器的引入对状态反馈系统的外部特性没有影响.
- ③ **带状态观测器的状态反馈和直接状态反馈的等价性:** 带状态观测器的状态反馈系统与直接状态反馈系统的外部特性一致, 但是内部特性只有在系统达到稳态时才等价.

解耦控制

设系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的传递函数阵为:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1r}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \cdots & g_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

式中, $g_{ij}(s)$ 表征第 j 个输入对第 i 个输出的传递关系.

当 $i \neq j$ 时, 非零的 $g_{ij}(s)$ 意味着不同标号的输入变量与输出变量之间存在耦合关系.

解耦控制是寻求适当的控制律, 使系统的每个输入变量仅控制一个输出变量, 而每个输出变量仅受一个输入变量控制, 也就是实现**一对一控制**.

解耦的定义

设 $\Sigma(A, B, C)$ 是一个具有 m 个输入和 m 个输出的多输入-多输出系统, 如果其传递函数阵 $G(s)$ 是非奇异对角形矩阵, 即

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & & & 0 \\ & g_{22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & g_{mm}(s) \end{bmatrix}$$

且 $g_{ii}(s) \neq 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ 那么称该系统是解耦的。

此时, 系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的输出为:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & & & 0 \\ & g_{22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & g_{mm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix}$$

写成分量形式为:

$$\begin{cases} y_1(s) = g_{11}(s)u_1(s) \\ y_2(s) = g_{22}(s)u_2(s) \\ \dots \\ y_m(s) = g_{mm}(s)u_m(s) \end{cases}$$

可见, 系统被分解成 m 个独立的单输入-单输出子系统, 实现了**输入与输出之间一对一控制**。

串联解耦

串联解耦是在受控系统前面串联一个动态补偿器，使串联组合系统的传递函数阵为非奇异对角形矩阵。

串联解耦的结构图如图7所示。

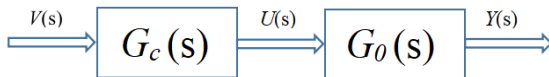


图 7. 串联解耦的结构图

图中， $G_0(s)$ 为受控系统的传递函数阵； $G_c(s)$ 为串联补偿器的传递函数阵。

串联组合系统的传递函数阵为

$$G(s) = G_0(s)G_c(s)$$

设 $G(s)$ 为非奇异对角形矩阵。若受控系统的传递函数阵 $G_0(s)$ 非奇异，则由上式可得串联补偿器的传递函数阵 $G_c(s)$ 为

$$G_c(s) = G_0^{-1}(s)G(s)$$

串联解耦

例 4 已知受控系统的传递函数阵为:

$$G_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{s-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

试设计一个串联补偿器使系统解耦, 且解耦后的传递函数阵为:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

串联解耦

解：传递函数阵 $G_0(s)$ 的行列式不等于零，是非奇异的，因此可以利用串联补偿器实现系统解耦。

$G_0(s)$ 的逆矩阵为：

$$G_0^{-1}(s) = \frac{(s+1)^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ -\frac{s-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} \\ -\frac{s^2-1}{2s} & \frac{(s+1)^2}{2s} \end{bmatrix}$$

根据式

$$G_c(s) = G_0^{-1}(s)G(s)$$

可确定串联补偿器的传递函数阵 $G_c(s)$ 为：

$$\begin{aligned} G_c(s) &= G_0^{-1}(s)G(s) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} \\ -\frac{s^2-1}{2s} & \frac{(s+1)^2}{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2(s+1)} & \frac{1}{2(s+2)} \\ -\frac{s^2-1}{2s(s+1)^2} & \frac{s+1}{2s(s+2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

状态反馈解耦

状态反馈解耦是，对受控系统采用带输入变换器的状态反馈，使状态反馈系统的传递函数阵为非奇异对角形矩阵。

状态反馈解耦的结构图如图8所示。

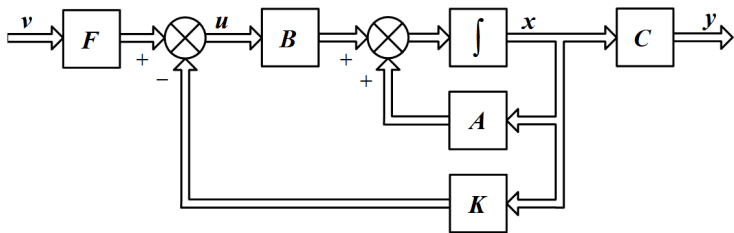


图 8. 状态反馈解耦的结构图

图中， K 为 $m \times n$ 维状态反馈阵； F 为 $m \times m$ 维输入变换阵； v 为 m 维参考输入向量。

状态反馈解耦

系统的控制律为:

$$u = Fv - Kx$$

可得状态反馈系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BFv \\ y = Cx \end{cases}$$

传递函数阵为:

$$G(s) = C[sI - (A - BK)]^{-1}BF$$

如果存在状态反馈阵 K 和输入变换阵 F 使 $G(s)$ 为非奇异对角形矩阵, 就可以对受控系统 $\sum(A, B, C)$ 实现状态反馈解耦。

受控系统 $\sum(A, B, C)$ 采用状态反馈能解耦的充要条件是, 矩阵 E 是非奇异的。

$$E = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m} B \end{bmatrix}_{m \times m}$$

式中, C_i 是 C 的第 i 行. $d_i = \min \{l \mid C_i A^l B \neq 0, l = 0, 1, \dots, m-1\}$ 或 $d_i = n-1$ ($C_i A^l B = 0, l = 0, 1, \dots, n-1$), $i = 1, 2, \dots, m$

状态反馈解耦

状态反馈阵 K 和输入变换阵 F 可确定为:

$$K = E^{-1}L, F = E^{-1}$$

其中,

$$L = \begin{bmatrix} C_1 A^{(d_1+1)} \\ C_2 A^{(d_2+1)} \\ \vdots \\ C_m A^{(d_m+1)} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

经过状态反馈解耦得到的状态反馈系统的传递函数阵为:

$$G(s) = C[sI - (A - BK)]^{-1}BF$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{d_1+1}} & & & 0 \\ & \frac{1}{s^{d_2+1}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{s^{d_m+1}} \end{bmatrix}$$

可见, 每个单输入-单输出系统的传递函数都具有多重积分的性质, 因此称此解耦形式为**积分型解耦**.

状态反馈解耦

例 5 已知受控系统为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

试设计冯态反馈使系统解耦.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m} B \end{bmatrix}_{m \times m} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} C_1 A^{(d_1+1)} \\ C_2 A^{(d_2+1)} \\ \vdots \\ C_m A^{(d_m+1)} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$d_i = \min \{ l \mid C_i A^l B \neq 0, l = 0, 1, \dots, m-1 \} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

状态反馈解耦

解: (1) 计算 d_1 和 d_2 :

$$C_1 A^0 B = [1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0] \neq 0 \quad d_1 = 0$$

$$C_2 A^0 B = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 1] \neq 0 \quad d_2 = 0$$

(2) 计算矩阵

$$E : E_E = \begin{bmatrix} C_1 B \\ C_2 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于 $\det E = 1 \neq 0$, 所以已知受控系统可以采用状态反馈实现积分型解耦.

(3) 根据计算矩阵

$$L : L = \begin{bmatrix} C_1 A \\ C_2 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

状态反馈解耦

(4) 计算矩阵 K 和 F :

$$K = E^{-1}L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad F = E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5) 可得闭环系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BFv \\ y = Cx \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

(6) 可得闭环系统的传递函数阵为:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

作业

- 5-1
- 5-3
- 5-4
- 5-6