第 5 章　系统的稳定性

温　杰

wen.jie@outlook.com

中北大学, 电气与控制工程学院

2023 年 春季学期

提纲

引言

李雅普诺夫稳定性相关概念
- 平衡态
- 李雅普诺夫稳定
- 渐进稳定与大范围渐进稳定
- 不稳定
- 线性定常系统状态稳定性与外部稳定性的关系

李雅普诺夫判稳第一法

李雅普诺夫判稳第二法
- 李雅普诺夫函数 (能量函数)
- 二次型及其定号性
- 李氏稳定性基本定理

李雅普诺夫第二法在线性系统中的应用

李雅普诺夫控制

引言

一个自动控制系统要能正常工作，必须首先是一个稳定的系统．稳定性是控制系统的首要问题．

稳定性的一般意义：

当系统受到外界干扰后，它的平衡被破坏，但在外扰去掉以后，它仍有能力自动地在平衡态下继续工作．

控制系统的稳定性，通常有两种定义方式：

- **外部稳定性**[1]：是指系统在零初始条件下通过其外部状态，即由系统的输入和输出关系所定义的外部稳定性．具体说，零状态下，有界的输入作用下，若系统所产生的输出也是有界的，就称该动态系统是外部稳定的，或有界输入有界输出 (BIBO) 稳定．外部稳定性只适用于线性系统．
- **内部稳定性**：系统在零输入条件下通过其内部状态变化所定义的内部稳定性，即状态稳定．内部稳定性不但适用于线性系统，而且也适用于非线性系统．

现代控制理论讨论的稳定性主要为内部稳定性．

内部稳定性和外部稳定性**在满足一定条件下是等价的**（后面讨论）．

[1] 在经典控制理论中定义的传递函数正是表征了系统在零初始条件下，输出量与输入量两者间的关系．利用传递函数极点判定稳定性，是典型的外部稳定性．

引言

- 经典理论判稳方法及局限性:
  - **间接判定**：方程求解－（对非线性和时变通常很难）
  - **直接判定**：单入单出中，基于特征方程的根是否都分布在复平面虚轴的左半部分；以及采用劳斯判据、奈魁斯特频率判据等．局限性是仅适用于线性定常，不适用于非线性和时变系统．
- 现代控制理论判稳方法：李雅普诺夫稳定性理论是稳定性判定的通用方法，适用于各种系统．
  - **李亚普诺夫第一法**：先求解系统微分方程，根据解的性质判定稳定性——间接法．
  - **李亚普诺夫第二法**：直接判定稳定性．思路：构造一个李亚普诺夫函数 $V(x)$，根据 $V(x)$ 的性质判稳．——对任何复杂系统都适用．

李雅普诺夫稳定性相关概念

- 平衡态
- 李雅普诺夫意义下的稳定性
- 渐近稳定性
- 大范围渐近稳定性
- 不稳定性
- 平衡态稳定性与输入输出稳定性的关系

平衡态

设系统[2]的状态方程为

$$\dot{\mathrm{x}} = f(\mathrm{x}, t)$$

式中，x: n 维状态向量; $f(\mathrm{x}, t)$: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 t 的 n 维向量函数，它可以是线性、非线性、定常或时变的.

若系统存在状态 x_e，对所有的 t_0 都满足 $\dot{\mathrm{x}}_e = 0$，则称 x_e 为**系统的平衡状态**.

从定义可知，平衡态即指状态空间中状态变量的导数向量为零向量的点 (状态). 由于导数表示的状态的运动变化方向，因此平衡态即指能够保持平衡、维持现状不运动的状态，如图1所示.

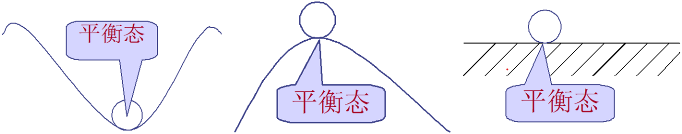


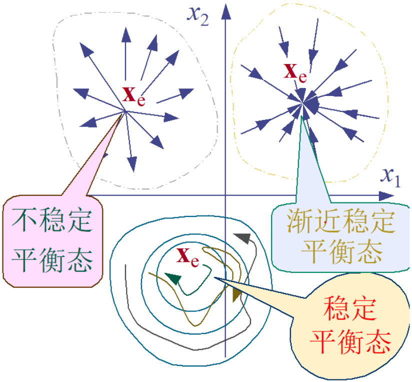
图 1. 平衡态示意图

[2] 自治系统

平衡态

李雅普诺夫稳定性研究的平衡态附近 (邻域) 的运动变化问题.

- 若平衡态附近某充分小邻域内所有状态的运动最后都趋于该平衡态，则称该平衡态是渐近稳定的;
- 若发散掉则称为不稳定的;
- 若能维持在平衡态附近某个邻域内运动变化则称为稳定的.



平衡态

对于线性定常系统, 状态方程为

$$\dot{x} = Ax$$

平衡方程为

$$A\mathrm{x}_e = 0$$

当系统矩阵 A 为非奇异矩阵时, 系统存在唯一一个平衡状态 $x_e = 0$, 即坐标原点.

当系统矩阵 A 为奇异矩阵时, 系统存在无穷多个平衡状态, $\mathrm{x}_e = 0$ 必定是其中一个.

平衡态

例如, 对于非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

其平衡态为下列代数方程组

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

的解，即下述状态空间中的三个状态为其孤立平衡态.

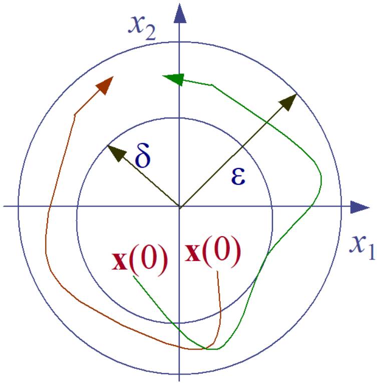
$$x_{e,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{e,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_{e,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

李雅普诺夫稳定

若状态方程

$$\dot{x} = f(x, t)$$

所描述的系统，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和任意初始时刻 t_0，都对应存在一个实数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$，使得对于任意位于平衡态 x_e 的球域 $S(x_e, \delta)$ 的初始状态 x_0，当从此初始状态 x_0 出发的状态方程的解 x 都位于球域 $S(x_e, \varepsilon)$ 内，则称系统的平衡态 x_e 是**李雅普诺夫意义下稳定**的.



在上述稳定的定义中，实数 δ 通常与 ε 和初始时刻 t_0 都有关，如果 δ 只依赖于 ε，而和 t 的选取无关，则称平衡状态是**一致稳定**的.

李雅普诺夫稳定

若状态方程

$$\dot{x} = f(x, t)$$

所描述的系统在初始时刻 t_0 的平衡态 x_e 是李雅普诺夫意义下稳定的，且系统状态最终趋近于系统的平衡态 x_e，即

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_e$$

则称平衡态 x_e 是**李雅普诺夫意义下渐近稳定**的.

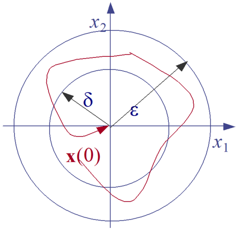


图 2. 渐近稳定

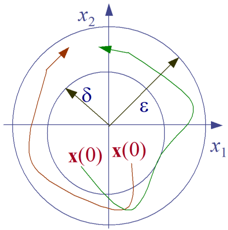


图 3. 李雅普诺夫稳定

李雅普诺夫稳定

对于 n 维状态空间中的所有状态，如果由这些状态出发的状态轨线都具有渐近稳定性，那么平衡态 x_e 称为**李雅普诺夫意义下大范围渐近稳定**的.

- 换句话说，若状态方程在任意初始状态下的解，当 t 无限增长时都趋于平衡态，则该平衡态为大范围渐近稳定的.
- 对于线性定常系统，如果其平衡态是渐近稳定的，则一定是大范围渐近稳定的. 但对于非线性系统，渐近稳定性是一个局部性的概念，而非全局性的概念.

不稳定

在初始时刻 t_0, 对于某个给定实数 $\varepsilon > 0$ 和任意一个实数 $\delta > 0$, 总存在一个位于平衡态 x_e 的邻域 $S(x_e, \delta)$ 的初始状态 x_0, 使得从 x_0 出发的状态方程的解 $x(t)$ 将脱离球域 $S(x_e, \varepsilon)$, 则称系统的平衡态 x_e 是**李雅普诺夫意义下不稳定**的.

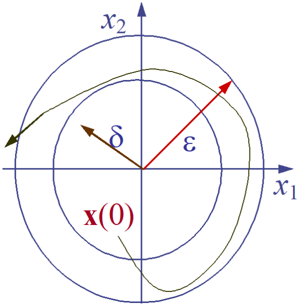


图 4. 李雅普诺夫意义下不稳定

线性定常系统状态稳定性与外部稳定性的关系

- 若线性定常系统能控能观，则其内部稳定和外部稳定等价.
- 若该系统不具有能控性和能观性，该系统的传递函数极点只是系统特征值的一部分. 在这种情况下，系统内部（状态）稳定，则外部稳定；若外部稳定，则不一定内部稳定.

李雅普诺夫判稳第一法

第一类方法是间接方法，首先解出线性方程组的特征值，然后根据全部特征值在复平面上的分布情况来判定系统在零输入情况下的稳定性．如果是非线性系统，在平衡态附近线性化，即在平衡态求其一次 Taylor 展开式，然后利用一次展开式表示的线性化方程去分析系统稳定性．即解出线性化状态方程组特征值，然后类似线性系统进行判断．

第一类方法，对象可以是线性与非线性系统，得到的是平衡态的状态稳定性结论．该方法与经典控制理论中间接判别稳定性方法的思路是一致的．这里不做详细讨论．

李雅普诺夫判稳第二法

李亚普诺夫第二方法又称直接法.

它的基本思想不是通过求解系统的运动方程，而是借助了一个李亚普诺夫函数来直接对系统平衡状态的稳定性做出判断. 它是从能量观点进行稳定性分析的：如果一个系统被激励后，其储存的能量随着时间的推移逐渐衰减，到达平衡状态时，能量将达最小值，那么，这个平衡状态是渐近稳定的. 反之，如果系统不断地从外界吸收能量，储能越来越大，那么这个平衡状态就是不稳定的. 如果系统的储能既不增加，也不消耗，那么这个平衡状态仅仅是一般的李亚普诺夫意义下的稳定.

它是一种通用方法，适用于各类系统，特别适用于非线性系统和时变系统，是现代控制理论中稳定性分析的重要内容.

李雅普诺夫函数 (能量函数)

设 $V(X)$ 为任一标量函数, 其中 X 为系统的状态变量, 如果 $V(X)$ 具有以下性质:

1. $\dot{V}(X) = \frac{dV(X)}{dt}$ 是连续的;
2. $V(X)$ 是正定的;
3. 当 $\|X\| \to \infty$ 时, $V(X) \to \infty$.

那么函数 $V(X)$ 称为**李亚普诺夫函数**.

李亚普诺夫函数的选取不唯一，多数情况下可取为二次型，因此二次型及其定号性是该理论的数学基础.

二次型

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 的二次齐次多项式为

$$
\begin{aligned}
V(x_1, x_2, \cdots x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots \\
& + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
& = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji}, i \neq j)
\end{aligned}
$$

称为**二次型函数**, 即二次型. 式中 a_{ij} 为二次型系数.

二次型

由二次型函数的定义可写成如下矩阵形式

$$
\begin{aligned}
V\left(x_1, x_2, \cdots x_n\right) =& x_1\left(a_{11} x_1+a_{12} x_2+\cdots+a_{1 n} x_n\right)+x_2\left(a_{21} x_1+a_{22} x_2+\cdots+a_{2 n} x_n\right) \\
& +\cdots+x_n\left(a_{n 1} x_1+a_{n 2} x_2+\cdots+a_{n n} x_n\right) \\
=& \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} x_1+a_{12} x_2+\cdots+a_{1 n} x_n \\ a_{12}+a_{22} x_2+\cdots+a_{2 n} x_n \\ \vdots \\ a_{n 1} x_1+a_{n 2} x_2+\cdots+a_{n n} x_n \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1 n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n 1} & a_{n 2} & \cdots & a_{n n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
=& X^T P X
\end{aligned}
$$

其中, $P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1 n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n 1} & a_{n 2} & \cdots & a_{n n} \end{bmatrix}$, P 称为二次型的矩阵.

$\because a_{ij}=a_{ji}, \therefore P=P^T$, 即 P 为对称矩阵.
显然二次型 $V\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 完全由矩阵 P 确定且 P 的秩称为**二次型的秩**.

二次型

例 1

$$V(x_1, x_2) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_1$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

定号性

1. **正定性**

如果对任意非零向量 $X(X \neq 0)$, 恒有 $V(X) > 0$, 且仅当 $X = 0$ 时 $V(X) = 0$, 则称 $V(X)$ 为正定的．即

$$\begin{cases} V(X) > 0 & X \neq 0 \\ V(X) = 0 & X = 0 \end{cases}$$

例 2

$$V(X) = x_1^2 + 2x_2^2$$

当 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 时，$V(X) = 0$;

当 $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ 时，$V(X) > 0$ ．所以，V(X) 是正定的.

定号性

2. **正半定性 (准正定)**

如果对任意非零向量 $X(X \neq 0)$, 恒有 $V(X) \geq 0$, 且仅当 $X = 0$ 时 $V(X) = 0$, 则称 $V(X)$ 为正半定的. 即

$$\begin{cases} V(X) \geq 0 & X \neq 0 \\ V(X) = 0 & X = 0 \end{cases}$$

例 3

$$V(X) = (x_1 + x_2)^2$$

当 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 时, $V(X) = 0$;

当 $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ 但 $x_1 = a, x_2 = -a$ 时, $V(X) = 0$. 所以, V(X) 是正半定的.

定号性

3. **负定性**

如果对任意非零向量 $X(X \neq 0)$, 恒有 $V(X) < 0$, 且仅当 $X = 0$ 时 $V(X) = 0$, 则称 $V(X)$ 为正定的．即

$$\begin{cases} V(X) < 0 & X \neq 0 \\ V(X) = 0 & X = 0 \end{cases}$$

例 4

$$V(X) = -\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

当 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 时, $V(X) = 0$;

当 $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ 时, $V(X) < 0$．所以, $V(\mathrm{X})$ 是负定的．

定号性

4. **负半定性 (准负定)**

如果对任意非零向量 $X(X \neq 0)$, 恒有 $V(X) \leq 0$, 且仅当 $X = 0$ 时 $V(X) = 0$, 则称 $V(X)$ 为负半定的. 即

$$\begin{cases} V(X) \leq 0 & X \neq 0 \\ V(X) = 0 & X = 0 \end{cases}$$

例 5

$$V(X) = -(x_1 + x_2)^2$$

当 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 时, $V(X) = 0$;

当 $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ 但 $x_1 = a, x_2 = -a$ 时, $V(X) = 0$. 所以, V(X) 是负半定的.

定号性

5. **不定性**

如果在某个邻域内，$V(X)$ 既可为正值也可为负值，则称 $V(X)$ 为不定的.

例 6

$$V(X) = x_1 x_2 + x_2^2$$

二次型标量函数定号性判别准则（塞尔维斯特准则）

设 $v(x)$ 为二次型函数, 即 $v(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T\mathrm{P}\mathrm{x}, \mathrm{P}$ 为实对称矩阵, $v(\mathrm{x})$ 与 P 的定号性相同.

- P 正定的充要条件是

$$\mathrm{P}\text{的各阶主子行列式}\Delta_k > 0(k = 1, 2, \cdots, n)$$

- P 负定的充要条件是

$$\Delta_k \begin{cases} > 0 & k \text{ 为偶数} \\ < 0 & k \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

- P 半正定的充要条件是

$$\Delta_k \begin{cases} \geq 0 & k = 1, 2, \cdots, n-1 \\ = 0 & k = n \end{cases}$$

- P 半负定的充要条件是

$$\Delta_k \begin{cases} \geq 0 & k \text{ 为偶数} \\ \leq 0 & k \text{ 为奇数} \\ = 0 & k = n \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

二次型标量函数定号性判别准则（塞尔维斯特准则）

说明：

各阶主子式大于零指的是

$$\Delta_1 = a_{11} > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \cdots$$

$$\Delta_n = |\mathrm{P}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

李氏稳定性基本定理

设系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x)$$

平衡状态为 $\mathrm{x}_e = 0$.

下面是李氏第二法判定系统平衡状态稳定性的几个基本定理.

1. 渐近稳定判定定理一
2. 渐近稳定判定定理二
3. 稳定判定定理
4. 不稳定判定定理

渐近稳定判定定理一

渐近稳定判定定理一

如果存在标量函数 $v(x)$, 满足

1. $v(\mathrm{x})$ 对所有 x 都具有一阶连续偏导数;
2. $v(\mathrm{x})$ 正定;
3. $\dot{v}(\mathrm{x})$ 负定;

则原点处的平衡状态是渐近稳定的.

当 $\|\mathrm{x}\| \to \infty$ 时, 有 $v(\mathrm{x}) \to \infty$, 则原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的.

渐近稳定判定定理一

例 7 已知非线性系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

试分析其平衡状态的稳定性.

解: (1) 由平衡方程得

$$x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 0$$
$$-x_1 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 0$$

解出唯一平衡状态为原点, 即 $x_e = 0$.

(2) 选取李氏函数为

$$v(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad (\text{正定})$$

$v(x)$ 对时间的导数为

$$\dot{v}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 \quad (\text{负定})$$

根据李氏渐近稳定定理一, 系统在原点处是渐近稳定的.

又由于当 $\|x\| \to \infty$ 时, $v(x) \to \infty$, 所以系统在原点处是大范围渐近稳定的.

渐近稳定判定定理二

渐近稳定判定定理二

如果存在标量函数 $v(x)$, 满足

1. $v(\mathrm{x})$ 对所有 x 都具有一阶连续偏导数;
2. $v(\mathrm{x})$ 正定;
3. $\dot{v}(\mathrm{x})$ 半负定, 但对 $\mathrm{x} \neq 0$, $\dot{v}(\mathrm{x})$ 不恒为零;

则原点处的平衡状态是渐近稳定的.

当 $\|\mathrm{x}\| \to \infty$ 时, 有 $v(\mathrm{x}) \to \infty$, 则原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的.

说明：能量减一会，歇一会.

渐近稳定判定定理二

例 8 已知系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

试确定平衡状态的稳定性.

解: （1）由平衡方程得

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

解出唯一平衡状态为原点, 即 $x_e = 0$.

（2）选取李氏函数为

$$v(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{(正定)}$$

$v(x)$ 对时间的导数为

$$\dot{v}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_2^2 \quad \text{(半负定)}$$

根据李氏稳定定理, 系统在原点处是稳定的.

渐近稳定判定定理二

是不是渐近稳定的? 还需进一步分析当 $x \neq 0$ 时, $\dot{v}(x)$ 是否恒为零.

假设

$$\dot{v}(x) = -2x_2^2 \equiv 0$$

必然要求 $x_2 \equiv 0$ 而 $x_2 \equiv 0$ 又要求 $\dot{x}_2 \equiv 0$.

从状态方程

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$

可知, 如果要求 $x_2 \equiv 0$ 和 $\dot{x}_2 \equiv 0$, 必须满足 $x_1 \equiv 0$. 这就表明, 在 $x \neq 0$ 时, $\dot{v}(x)$ 不恒为零.

根据李氏渐近稳定定理二, 系统在原点处渐近稳定的.

又由于当 $\|x\| \to \infty$ 时, 有 $v(x) \to \infty$, 所以系统在原点处是大范围渐近稳定的.

稳定判定定理

稳定判定定理

如果存在标量函数 $v(x)$, 满足

1. $v(\mathrm{x})$ 对所有 x 都具有一阶连续偏导数;
2. $v(\mathrm{x})$ 正定;
3. $\dot{v}(\mathrm{x})$ 半负定;

则原点处的平衡状态是稳定的.

稳定判定定理

例 9 已知系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

试确定系统平衡状态处的稳定性.

解: （1）由平衡方程得

$$\begin{cases} 4x_2 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases}$$

解出唯一平衡状态为原点, 即 $x_e = 0$.

（2）选取李氏函数为

$$v(x) = x_1^2 + 4x_2^2 \quad (\text{正定})$$

$v(x)$ 对时间的导数为

$$\dot{v}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 8x_2\dot{x}_2 = 8x_1x_2 - 8x_1x_2 \equiv 0$$

可见，$\dot{v}(x)$ 在任意给定的 x 值上均保持为零.

根据李氏稳定定理，系统在原点处是稳定的，但不是渐近稳定的.

不稳定判定定理

不稳定判定定理

如果存在标量函数 $v(x)$, 满足

1. $v(\mathrm{x})$ 对所有 x 都具有一阶连续偏导数;
2. $v(\mathrm{x})$ 正定;
3. $\dot{v}(\mathrm{x})$ 正定;

则原点处的平衡状态是不稳定的.

李雅普诺夫第二法在线性系统中的应用

李氏稳定性定理给出的是判定系统稳定性的充分条件，而不是必要条件．如果能够找到满足定理条件的李氏函数 $v(x)$，则可进行判定．反之，如果没找到（不是找不到），则不能得出结论．李氏稳定性理论没有提供构造李氏函数 $v(x)$ 的一般方法．但对于线性定常系统有以下构造方法：

设线性定常连续系统

$$\dot{x} = \mathrm{A}x$$

式中, $x : n$ 维状态向量; $\mathrm{A} : n \times r$ 常数矩阵, 且非奇异.

在平衡状态 $x_e = 0$ 渐近稳定的充要条件是:

对任意给定的一个正定对称矩阵 Q, 总存在一个正定实对称矩阵 P, 满足矩阵方程

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{P} + \mathrm{P}\mathrm{A} = -\mathrm{Q}$$

的标量函数 $v(x) = x^{\mathrm{T}}\mathrm{P}x$ 是这个系统的一个二次型形式的李氏函数.

李雅普诺夫第二法在线性系统中的应用

说明:

1. 由必要性, 对任意给定的正定对称矩阵 Q, 如果由
$$A^{T}P + PA = -Q$$
解出的 P 不正定, 则可判断平衡状态 $x_e = 0$ 不是渐近稳定的.
2. 由必要性, Q 的选择具有任意性、不唯一性, 为简单起见，通常选取 $Q = I$.

判断的一般步骤:

1. 确定系统的平衡状态.
2. 取正定矩阵 $Q = I$, 且设实对称矩阵 P 为以下形式:
$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$
3. 解矩阵方程 $A^{T}P + PA = -I$, 求出 P .
4. 利用塞尔维斯特判据, 判断 P 的正定性. 若 P 正定, 系统在 $x_e = 0$ 处渐近稳定 (隐含 $v(x)$ 的导数负定[3]) .

[3] $\dot{v}(x) = \dot{x}^{T}Px + x^{T}P\dot{x} = x^{T}\left(A^{T}P + PA\right)x \quad \dot{v}(x) = x^{T}(-Q)x$

李雅普诺夫第二法在线性系统中的应用

例 10 已知系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

试确定系统在平衡状态原点处的稳定性.

解: 设李氏函数为

$$v(x) = x^T P x$$

$$\dot{v}(x) = x^T(-Q)x$$

取 $\mathrm{Q} = \mathrm{I}$, 则 P 矩阵可由下式确定:

$$\mathrm{A}^T\mathrm{P} + \mathrm{PA} = -\mathrm{I}$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -p_{12} & -p_{22} \\ p_{11} - p_{12} & p_{21} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{12} & p_{11} - p_{12} \\ -p_{22} & p_{21} - p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

李雅普诺夫第二法在线性系统中的应用

将矩阵方程展成联立方程组:

$$\begin{cases} -2p_{12} = -1 \\ p_{11} - p_{12} - p_{22} = 0 \\ 2p_{21} - 2p_{22} = -1 \end{cases}$$

解出

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

利用塞尔维斯特判据, 判断 P 的正定性:

$$\Delta_1 = p_{11} = \frac{3}{2} > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} > 0$$

可见 P 正定, 系统在原点处是渐近稳定的.

而系统的李氏函数及其导数分别为

$$v(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T \mathrm{P} \mathrm{x} = \frac{1}{2}\left(3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2\right) \qquad (\text{正定})$$

$$\dot{v}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T(-\mathrm{I})\mathrm{x} = -\left(x_1^2 + x_2^2\right) \qquad (\text{负定})$$

拓展：李雅普诺夫控制

根据李雅普诺夫稳定性定理，使用李雅普诺夫方法设计控制律可按照如下过程：

1. 构造一个函数 $V(x,t)$ 满足李雅普诺夫函数的条件，即 $V(x,t)$ 关于 x 一阶连续可导，不小于零且仅当 $x = x_e$ 时，$V(x,t) = 0$.
2. 求出 $V(x,t)$ 对时间的一阶导数 $\dot{V}(x,t)$.
3. 设计控制律使 $\dot{V}(x,t) \leq 0$ 且仅在 $x = x_e$ 处等号成立.

举例：

1. 旋转倒立摆 (课内实验)
2. 量子系统控制 (Automatica 2008)

说明：

1. 李雅普诺夫稳定性定理的拓展
2. 拉塞尔不变集原理

作业

- 4-1
- 4-3
- 4-11