第 3 章　状态方程的解

温　杰

wen.jie@outlook.com

中北大学, 电气与控制工程学院

2023 年 春季学期

提纲

状态转移矩阵

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

解的形式上有

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

其中:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$$

推广一下:

初始状态 $t = t_0 \neq 0$，则有

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

其中，$e^{A(t-t_0)}$ 矩阵指数和状态转移矩阵.

求解齐次状态方程的问题, 核心就是计算状态转移矩阵的问题.

状态转移矩阵

1. **定义计算**

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots$$

这种计算法易于计算机计算, 但难于获得解析解.

当系统稳定时, 矩阵指数的计算是收敛的. 在用计算机编程计算时, 需按一定计算精度要求来确定计算项数.

2. **拉普拉斯反变换计算**

1. 拉氏变换 $\dot{X}(t)=AX(t)$;
2. $sX(s)-X(0)=AX(s)\Rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}X(0)$;
3. 拉氏反变换 $X(s)=(sI-A)^{-1}X(0)\Rightarrow e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$

这种计算方法可以得到解析结果，但当矩阵 A 的阶数较高时，其计算复杂.

状态转移矩阵

例 1 用 Laplace 变换法计算矩阵指数:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

解:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)[s+2]} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ -\frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵

3. **线性变换法**

若

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

则

$$e^{At} = Pe^{\Lambda t}P^{-1} = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

状态转移矩阵

例 2 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

计算矩阵指数 e^{At}

解: 1）特征值

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 6 & \lambda + 11 & -6 \\ 6 & 11 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$$

2) 计算特征矢量:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵

3) 构造变换阵 P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-t} + 6e^{-3t} & -8e^{-2t} + 9e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 12e^{-2t} + 9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t} - 16e^{-2t} + \frac{27}{2}e^{-3t} & -2e^{-t} + 12e^{-2t} - 9e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

状态转移矩阵

注意：若出现约旦块的形式

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \cdots & \frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & \cdots & \cdots & \frac{t^{(n-2)}}{(n-2)!}e^{\lambda t} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

状态转移矩阵

4. 凯莱-哈密顿方法

凯莱-哈密顿定理

矩阵 A 满足它自己的特征方程．即若设 n 阶矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

则有：

$$f(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

进一步:

$$\begin{aligned} A^n &= -a_0 I - a_1 A - \cdots - a_{n-1}A^{n-1} \\ A^{n+1} &= -a_0 A - a_1 A^2 - \cdots - a_{n-1}A^n \\ A^k &= c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{n-1}A^{n-1}, k \geq n \end{aligned}$$

所以:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \cdots \\ &= a_0(t)I + a_1(t)A + \cdots a_{n-1}(t)A^{n-1} \end{aligned}$$

状态转移矩阵性质

- $\Phi(0) = I$
- $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A$
- $\Phi\left(t_1 + t_2\right) = \Phi\left(t_1\right)\Phi\left(t_2\right)$
- $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t), \Phi^{-1}(-t) = \Phi(t)$
- $[\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$

线性时不变 (LTI) 系统非齐次状态方程的解

考虑系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0), \quad t \geq 0$$

将 $x(t)$ 左乘 e^{-At} 后求导得:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] = e^{-At}Bu(t)$$

两边积分得:

$$\int_0^t \left\{\frac{d}{d\tau}\left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]\right\} d\tau = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$e^{-At}x(t) - x(0)I = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, t \geq 0$$

更一般的形式为:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, t \geq t_0$$

系统的动态响应由两部分组成: 一部分是由初始状态引起的系统自由运动, 叫做零输入响应; 另一部分是由控制输入所产生的受控运动, 叫做零状态响应.

线性时不变 (LTI) 系统非齐次状态方程的解

例 3 求以下系统对单位阶跃输入的状态响应

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解: 对该系统

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

则响应输出为:

$$\begin{aligned} x(t) =& e^{At}x(0) + \int_o^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1(t) dT \\ =& \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

小结

本章对系统运动的分析是通过求系统方程的解来进行的．状态方程是矩阵微分方程，输出方程是矩阵代数方程．因此，求系统方程的解的关键在于求状态方程的解．

线性系统方程的解是借助状态转移矩阵来表示的．本章介绍了线性定常系统状态转移矩阵的四种计算方法．有了状态转移矩阵，就可以求出系统在初始状态激励下的自由运动 (齐次状态方程的解) 以及在输入向量作用下的强迫运动 (非齐次状态方程的解)．应当指出，系统自由运动轨线的形态是由状态转移矩阵决定的，也就是由 A 唯一决定的．然而对一个系统来说，A 是一定的，因此只有靠人为地采取措施 (如第五章的状态反馈和输出反馈) 来改造自由运动的形态．

状态 $x(t)$ 求出后，即可求出系统的输出 $y(t)$．只要有了 $y(t)$ 就可以按经典控制理论中介绍的时域分析法来定量地分析系统的性能．由于这个响应 $y(t)$ 是针对某个控制 $u(t)$ 而言的，这就为用 $u(t)$ 来达到希望的 $y(t)$ 形态提供了可能．

作业

- 2.1 - (1)(4)
- 2.2
- 2.7
- 2.8