第 2 章　控制系统的状态空间描述

温　杰

wen.jie@outlook.com

中北大学, 电气与控制工程学院

2023 年 春季学期

提纲

状态的基本概念

状态：一个能够完全描述系统时域行为的最小变量组．通常记为 $x_1(t)$, $x_2(t), \cdots, x_n(t)$.

说明：

1. 完全描述是指，只要知道了这个最小变量组在初始时刻 $t = t_0$ 的值，以及 $t \geq t_0$ 时刻系统的输入函数，那么系统在 $t \geq t_0$ 任何时刻的行为都能确定．
2. 最小变量组是指，变量组在能够完全描述系统的前提下所含变量的个数最少．少则不能完全描述，多则出现冗余．

状态变量：构成状态的每一个变量称为系统的状态变量．

状态的基本概念

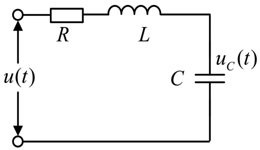


图 1. RLC 电路系统

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=u(t)$$

只要确定了初值和输入，$t\geq t_0$ 任何时刻的 $u_C(t)$ 和 $\dot{u}_C(t)$ 都可以唯一确定，从而 $t\geq t_0$ 任何时刻的所有变量都可以唯一确定．因此，$u_C(t)$ 和 $\dot{u}_C(t)$ 是该 RLC 电路系统的状态．

该状态含有两个状态变量：$x_1(t)=u_C(t)$，$x_2(t)=\dot{u}_C(t)$.

除了 $u_C(t)$ 和 $\dot{u}_C(t)$ 为状态以外，可以验证：

1. $u_c(t)$ 和 $i_L(t)$, 其中 $i_L(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=C\dot{u}_C(t)$
2. $i_L(t)$ 和 $\int i_L(t)dt$
3. $u_c(t)$ 和 $u_c(t)+Ri_L(t)$

等变量组也是 RLC 电路系统的状态.

状态的基本概念

关于系统状态的概念需要注意以下几点：

1. 状态所含状态变量的个数等于系统的阶数．系统的阶数等于系统中独立储能元件的个数．通常记一个 n 阶系统的状态变量为 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$.
2. 系统的状态变量之间相互独立，即线性无关．
3. 系统的状态是不唯一的．
4. 系统的任意两个状态之间存在非奇异变换关系．
5. 通常选取具有实际物理意义或易于测量的参量作为状态变量，如物理系统中的电流、电压、位移、速度、压力、温度及其他类似的物理量．

状态的基本概念

状态向量：由状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 构成的列向量，即

$$\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

称为状态向量，也可称为状态.

状态空间：以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为坐标轴所构成的 n 维空间，称为状态空间.

系统的每一个时刻的状态都可以用状态空间中的一个点来表示.

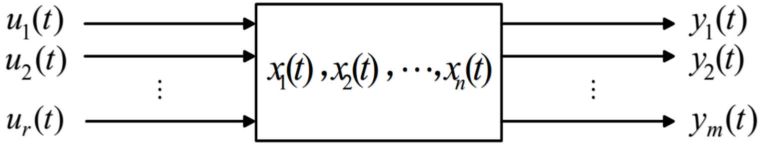
状态轨迹：如果给定了系统在初始时刻 t_0 的状态 $x(t_0)$ 和 $t \geq t_0$ 时的输入函数，随着时间的推移，状态 $x(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨迹.

状态轨迹可在状态空间中形象地描述系统状态的变化过程.

状态的基本概念

状态空间表达式：设一个 n 阶连续系统的

- r 个输入变量为：$u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t)$
- m 个输出变量为：$y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t)$
- n 个状态变量为：$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$



输入引起系统状态的变化，而状态和输入的变化则决定输出的变化.

状态的基本概念

对于连续系统，描述系统状态变量运动规律的一组一阶微分方程，称为状态方程.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t); t\right] \\
\dot{x}_2(t) &= f_2\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t); t\right] \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t); t\right]
\end{aligned}
$$

系统的输出变量与状态变量、输入变量之间的代数关系式，称为输出方程.

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t); t\right] \\
y_2(t) &= g_2\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t); t\right] \\
&\vdots \\
y_m(t) &= g_m\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t); t\right]
\end{aligned}
$$

状态的基本概念

系统的输入方程和输出方程总合起来，称为系统的状态空间表达式.

记作：

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{F}[\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t), t] \\ \mathrm{y}(t) = \mathrm{G}[\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t), t] \end{cases}$$

其中：

$$\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \mathrm{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad \mathrm{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

状态的基本概念

对于线性定常连续系统：

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{Ax}(t) + \mathrm{Bu}(t) \\ \mathrm{y}(t) = \mathrm{Cx}(t) + \mathrm{Du}(t) \end{cases}$$

其中，A, B, C, D 是常数矩阵，统称系数矩阵.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}_{n\times r}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}_{n\times r}$$

A 称为系统矩阵；B 称为输入矩阵；

C 称为输出矩阵；D 称为直联矩阵.

状态的基本概念

对于单输入单输出线性定常连续系统，$u(t)$ 和 $y(t)$ 为标量，状态空间表达式常写为

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}}(t) = A\mathrm{x}(t) + bu(t) \\ y(t) = c\mathrm{x}(t) + du(t) \end{cases}$$

式中，A 是 $n \times n$ 矩阵；b 是 $n \times 1$ 矩阵，即 n 维列向量；c 是 $1 \times n$ 矩阵，即 n 维行向量；d 是 1×1 矩阵，即标量．

线性定常连续系统的结构图如图2所示．

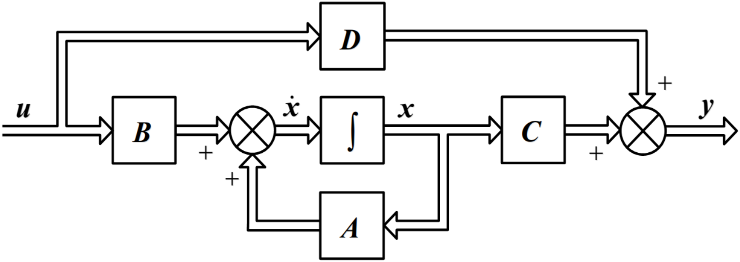


图 2. 线性定常连续系统结构图

状态的基本概念

模拟结构图是指由积分器、加法器、比例器和箭头线构成的、表示系统中各状态变量之间信息传递关系的图形.

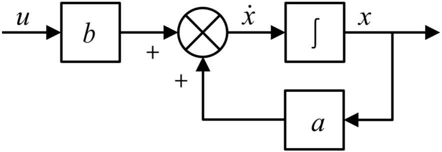
绘制系统模拟结构图的步骤:

1. 首先在适当的位置上画出积分器，积分器的数目同状态变量的个数，每个积分器的输出表示对应的状态变量;
2. 根据给定的状态方程和输出方程，画出相应的加法器和比例器;
3. 最后用箭头线将这些元件连接，表示出信号的传递关系.

例 1 设一阶系统的微分方程为

$$\dot{x} = ax + bu$$

该系统的模拟结构图为



$$\frac{X(s)}{U(s)} = b \cdot \frac{1}{s-a}$$

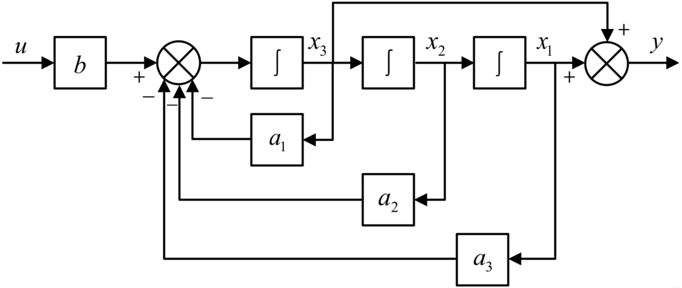
状态的基本概念

例 2 设一个三阶系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + bu$$
$$y = x_1 + x_3$$

试绘制该系统的模拟结构图.

解： 该系统的模拟结构图为



SISO 系统

状态描述和经典描述方法之间的关系.

SISO 系统的状态空间分成为：

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{Ax}(t) + \mathrm{bu}(t) & x(0) = 0 \\ y(t) = \mathrm{cx}(t) + du(t) & \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

其中，$A : n \times n$, $b : n \times 1$, $c : 1 \times \mathrm{n}$, $d : 1 \times 1$.

取拉氏变换得：

$$\begin{aligned} sx(s) &= Ax(s) + bu(s) \\ y(s) &= \left(c(s \cdot I - A)^{-1)} b + d\right) u(s) \end{aligned}$$

从而

$$g(s) = c(sI - A)^{-1} b + d = \frac{c \operatorname{adj}(sI - A) b}{|sI - A|} + d$$

SISO 系统

SISO 的经典传递函数为

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

和 SISO 系统的状态空间比较可知：

1. 系统矩阵 A 的特征多项式等同于传递函数的分母多项式, 当时也叫做特征多项式. 微分方程也这么叫. 微分方程、线性代数、复变函数特征值同一.
2. A 可能不同，但 $|\mathrm{s}| - \mathrm{A}|$ 相同的. 线性变换的本质在这里体现.

MIMO 系统

状态描述和经典描述方法之间的关系.

MIMO 系统的状态空间分成为：

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{A}\mathrm{x}(t) + \mathrm{B}u(t) \\ y(t) = \mathrm{C}\mathrm{x}(t) + \mathrm{D}u(t) \end{cases}$$

其中，$A : n \times n$, $b : n \times p$, $c : q \times \mathrm{n}$, $d : q \times p$.

其对应的传递函数[1]为：

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{y(s)}{u(s)} \\ &= \mathrm{C}(s\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{B} + \mathrm{D} \\ &= \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1p}(s) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{q1}(s) & \cdots & g_{qp}(s) \end{bmatrix}_{q \times p} \end{aligned}$$

[1] 共同的分母，特征多项式.

机理分析法

Oral Review!

根据高阶微分方程求状态空间表达式

控制系统的数学模型可用如下高阶微分方程描述：

$$\begin{aligned} y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y \\ = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + b_2 u^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \end{aligned} \tag{1}$$

若$u^{(i)}(t) \equiv 0$，则(1)可改写为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u \tag{2}$$

微分方程(2)可以化为能控标准型和能观测标准型.

根据高阶微分方程求状态空间表达式

化为能控标准型

取状态变量

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y \\
x_2 &= \dot{y} \\
&\vdots \\
x_n &= y^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

则有:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\vdots \\
\dot{x}_{n-1} = x_n \\
\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + u \\
y = x_1
\end{cases}
$$

写成矩阵形式[a]:

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\
y(t) = cx(t)
\end{cases}
$$

其中,

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}
$$

$$
b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
$$

[a]友矩阵

根据高阶微分方程求状态空间表达式

例 3 考虑系统

$$\dddot{y}+5\ddot{y}+8\dot{y}+6y=3u$$

试写出其能控标准型状态空间表达式.

解：选择状态变量: $x_1=y, x_2=\dot{y}, x_3=\ddot{y}$，则

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=x_3\\ \dot{x}_3&=-6x_1-8x_2-5x_3+3u\\ y&=x_1\end{aligned}$$

从而状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-8&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

根据高阶微分方程求状态空间表达式

化为能观标准型

取状态变量：

$$
\begin{cases}
x_1 = y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-3}\ddot{y} + a_{n-2}\dot{y} + a_{n-1}y \\
x_2 = y^{(n-2)} + a_1 y^{(n-3)} + \cdots + a_{n-3}\dot{y} + a_{n-2}y \\
x_3 = y^{(n-3)} + a_1 y^{(n-4)} + \cdots + a_{n-3}y \\
\quad\vdots \\
x_{n-1} = \dot{y} + a_1 y \\
x_n = y
\end{cases}
$$

根据高阶微分方程求状态空间表达式

化为能观标准型

则得能观标准型状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

根据高阶微分方程求状态空间表达式

若$u^{(i)}(t) \neq 0$，高阶微分方程(1)化为状态空间方程的方法为：

Step 1. 计算

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_0\beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0 \end{cases}$$

Step 2. 定义状态变量[2]

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u \\ \quad\vdots \\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u \end{cases}$$

[2] x_1 求导以后，貌似有 u 的一阶导，但可以用 x_2 代替；依次同理，一直到 x_n，求导后 $y^{(n)}$ 中带来的尾巴及各状态变量，消除掉 u 的各阶导.

根据高阶微分方程求状态空间表达式

Step 3. 写成矩阵形式的状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 + \beta_0 u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

根据传递函数求状态空间表达式

直接分解法

单输入单输出线性定常系统传递函数为：

$$\bar{g}(s) = \frac{\bar{Y}(s)}{\bar{U}(s)} = \frac{\bar{b}_0 s^m + \bar{b}_1 s^{m-1} + \cdots + \bar{b}_{m-1} s + \bar{b}_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

若 $m = n$

$$\bar{g}(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} + \bar{b}_0 = g(s) + d$$

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

输出为:

$$Y(s) = U(s) \frac{b_1 s^{-1} + \cdots + b_{n-1} s^{-(n-1)} + b_n s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + \cdots + a_{n-1} s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}}$$

根据传递函数求状态空间表达式

直接分解法

令[3] $E(s)=U(s)\frac{1}{1+a_1s^{-1}+\cdots+a_{n-1}s^{-(n-1)}+a_ns^{-n}}$，则有:

$$E(s)=U(s)-a_1s^{-1}E(s)-a_2s^{-2}E(s)-\cdots-a_ns^{-n}E(s)$$

$$Y(s)=b_1s^{-1}E(s)+b_2s^{-2}E(s)+\cdots+b_{n-1}s^{-(n-1)}E(s)+b_ns^{-n}E(s)$$

令 $s^{-1}E(s), s^{-2}E(s), \cdots, s^{-n}E(s)$ 分别表示 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$, 的拉氏变换, 则系统的状态空间表达式[4]为:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\vdots\\\dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\\-a_n&-a_{n-1}&\cdots&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_n&b_{n-1}&\cdots&b_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+b_0u.$$

[3] $E(s)$ 为误差端信号．误差传递函数
[4] 此处 b_n 到 b_1 都是真分式的分子系数

根据传递函数求状态空间表达式

直接分解法

重新取状态变量，也可以得到另一个状态空间表示：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

由于微分方程与传递函数的对应关系，此方法也可以作为微分方程转换状态表达式的方法之一，且不对 u 的微分阶次有限定性要求.

根据传递函数求状态空间表达式

并联分解法

极点两两相异时

$$g(s)=N(s)/D(s)=\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$
$$=\frac{c_1}{(s-p_1)}+\frac{c_2}{(s-p_2)}+\cdots+\frac{c_n}{(s-p_n)}$$

其中，$c_i=\lim_{s\to p_i}(s-p_i)g(s)$.

令 $x_i(s)=\frac{1}{(s-p_i)}u(s)\Rightarrow sx_i(s)=p_ix_i(s)+u(s)$，则有:

$$\dot{x}_i(t)=p_ix_i(t)+u(t)$$

以及

$$y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-p_i}u_i(s)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(s)$$

从而，$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(t)$.

根据传递函数求状态空间表达式

并联分解法

系统的矩阵式表达:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

当然也可以**串联分解**，但不像并联分解可以得到解耦结构，少用.

状态向量的线性变换

状态表达和经典表达关系清楚了，那在状态表达上也想选个好的形式.
如何选状态，就有最简化的表达?

状态是可以任意选取的，他们之间只存在线性变换!

考虑系统:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

取线性非奇异变换 $x = P\bar{x}$，其中，矩阵 P 非奇异. 可得

$$\begin{cases} P\dot{\bar{x}} = AP\bar{x} + Bu \\ y = CP\bar{x} + Du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\bar{x} + Du \end{cases}$$

整理得:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$

其中，$\bar{A} = P^{-1}AP, \bar{D} = D, \bar{C} = CP, \bar{B} = P^{-1}B$.

状态向量的线性变换

例 4 考虑系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

试将其进行线性变换写出新的状态空间表达式.

解：取变换

$$x = P\bar{x}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

状态空间表达式变为:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}Bu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}$$

对角标准型

定义

令 A 为 n 阶矩阵. 若 λ 和 n 维向量 ξ 满足 $A\xi = \lambda\xi$, 则称 λ 为矩阵 A 的特征根, 而 ξ 为对应的特征向量.

定理

对于系统 $\dot{x} = Ax + bu$, 若矩阵 A 具有 n 个两两相异的特征根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则存在线性非奇异变换 $x = P\bar{x}$ 将系统化为对角标准型 $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

充要条件: n 阶系统矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量.

注意: 不是 n 个不同特征值. 事实上同一特征值, 也可能有不同特征向量.

对角标准型

证明： 设 $P=(p_1,\cdots,p_n)$，p_i 为特征根 $\lambda_i, i=1,\cdots,n$ 所对应的特征向量．则有

$$\begin{aligned}
AP &= (Ap_1,\cdots,Ap_n) = (\lambda_1 p_1,\cdots,\lambda_n p_n) \\
&= (p_1,\cdots,p_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= P\bar{A} \\
\Rightarrow \bar{A} &= P^{-1}AP
\end{aligned}$$

化对角标准型的步骤：

1. 求取系统矩阵 A 的 n 个特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 和对应的特征向量．
2. 令 $P=(p_1,\cdots,p_n)$．
3. 做变换 $\bar{A}=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}=\Lambda$．

对角标准型

例 5 将下面的系统化为对角标准型

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}u$$

解: 1) 求系统特征根.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=-1$$

2) 求特征矢量.

对 $\lambda_1=2,(\lambda_1 I-A)\,v_1=0$ 可得

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}v_{21}+v_{31}=0\\ 3v_{21}=0\\ -2v_{21}+v_{31}=0\end{cases}\Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

对角标准型

对 $\lambda_2 = 1, (\lambda_2 I - A)\, v_2 = 0$ 可得

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_{12} + v_{22} + v_{32} = 0 \\ v_{22} = 0 \\ v_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对 $\lambda_3 = -1, (\lambda_3 I - A)\, v_3 = 0$ 可得

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3v_{13} + v_{23} + v_{33} = 0 \\ v_{23} + v_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

构成状态转移矩阵 P :

$$P = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) 新的状态方程为:

$$\dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}Bu = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

对角标准型

例 6 将下面的系统化为对角标准型

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解: 1) 求系统特征根.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$$

2) 求特征矢量.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, (\lambda_1 I - A)\, v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{31} = 0 \\ -v_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{及} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对角标准型

对 $\lambda_3 = 2$, 由 $(\lambda_3 I - A)\,v_3 = 0$ 可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{13} + v_{33} = 0 \\ v_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

构成状态转移矩阵 P :

$$P = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) 新的状态方程为:

$$\dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}Bu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

对角标准型

特别说明：

如果 A 是友矩阵，即系统是能控标准型，且特征值两两互异，变换矩阵有特殊形式：**范德蒙矩阵**

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

若当标准型

设矩阵 A 具有 n 重特征根, 即 $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^n = 0$. 设 v_1^1 是 λ_1 所对应的特征向量，若 v_1^j 满足 $(\lambda_1 I - A)\, v_1^j = -v_1^{j-1}, j = 2, \cdots, n_i$，则 v_1^j 称为广义特征向量. 矩阵 A 可通过线性变换化为约当标准型.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

求约当标准型的步骤:

1. 求解 $(\lambda I - A)v_1 = 0, (\lambda I - A)v_i = -v_{i-1}, 2 \le i \le k$.
2. 令 $P = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$.
3. 做变换 $\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = J_k(\lambda)$.

若当标准型

例 7 将下面的系统化为约当标准型

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解: 1) 求系统特征根.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1$$

2) 求特征矢量.

对 $\lambda_1 = 2$, 由 $(\lambda_1 I - A)\, v_1 = 0$ 可得

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_{11} - v_{21} = 0 \\ 2v_{21} - v_{31} = 0 \\ -2v_{11} - 3v_{21} + 2v_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

若当标准型

对 $\lambda_2=-1$, 由 $(\lambda_2 I-A)\,v_2=0$ 可得

$$\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\-2&-3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}-v_{12}-v_{22}=0\\-v_{22}-v_{32}=0\\-2v_{12}-3v_{22}-v_{32}=0\end{array}\right.\Rightarrow v_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

对 $\lambda_3=-1$, 由 $(\lambda_3 I-A)\,v_3=-v_2$ 可得

$$\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\-2&-3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}-v_{13}-v_{23}=-1\\-v_{23}-v_{33}=1\\-2v_{13}-3v_{23}-v_{33}=-1\end{array}\right.\Rightarrow v_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

构成状态转移矩阵

$$P=[v_1,v_2,v_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\4&1&-1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&-5&2\\6&3&-3\end{bmatrix}$$

3) 新的状态方程为:

$$\dot{\bar{x}}=P^{-1}AP\bar{x}+P^{-1}Bu=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}\bar{x}+\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}u$$

特征值及传递函数矩阵的不变性

特征值 (特征多项式、特征方程)

$$\left|\lambda I - A\right| = 0 \text{经变换} \left|\lambda I - P^{-1}AP\right| = 0$$

$$\begin{aligned}
\left|\lambda I - P^{-1}AP\right| &= \left|\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP\right| \\
&= \left|P^{-1}(\lambda I - A)P\right| \\
&= \left|P^{-1}\right| \left|\lambda I - A\right| \left|P\right| \\
&= \left|P^{-1}\right| \left|P\right| \left|\lambda I - A\right| \\
&= \left|P^{-1}P\right| \left|\lambda I - A\right| = \left|\lambda I - A\right|
\end{aligned}$$

作业

- 1.2 - (3)
- 1.4 - (1)(4)
- 1.5
- 1.10 - (3)
- 1.11 - (3)
- 1.12